Министерство образования и науки Самарской области

Государственное автономное профессиональное образовательное учреждение Самарской области

«САМАРСКИЙ МЕТАЛЛУРГИЧЕСКИЙ КОЛЛЕДЖ»

CaMeK

Методические указания по выполнению самостоятельной работы студентов по дисциплине ЕН.01 «Математика»

для специальности

15.02.08 Технология машиностроения

Самара, 2015

Содержание

1. Пояснительная записка

В связи с введением в образовательный процесс нового Федерального государственного образовательного стандарта все более актуальной становится задача организации самостоятельной работы студентов. Самостоятельная работа определяется как индивидуальная или коллективная учебная деятельность, осуществляемая без непосредственного руководства преподавателя, но по его заданиям и под его контролем и руководством.

Самостоятельная работа студентов является одной из основных форм аудиторной и внеаудиторной работы при реализации учебных планов и программ. По дисциплине «Математика» практикуются следующие виды и формы самостоятельной работы студентов:

- отработка изучаемого материала по печатным и электронным источникам, конспектам лекций;
- изучение лекционного материала по конспекту с использованием рекомендованной литературы и Интернет-ресурсов;
- завершение аудиторных лабораторно-практических работ и оформление отчётов по ним;
- написание конспекта по заданной тематике;
- выполнение домашних заданий;
- выполнение индивидуальных и проектно-исследовательских работ и оформление отчётов по ним;
- подготовка информационных сообщений, докладов с компьютерной презентацией, рефератов;
- подготовка материала-презентации.

Самостоятельная работа может проходить в математическом кабинете, компьютерном зале, дома.

Целью самостоятельной работы студентов является овладение фундаментальными знаниями, профессиональными умениями и навыками деятельности по профилю, опытом творческой и проектно-исследовательской деятельности.

Самостоятельная работа студентов способствует развитию самостоятельности, ответственности и организованности, творческого подхода к решению проблем учебного и профессионального уровня.

Студент в процессе обучения должен не только освоить учебную программу, но и приобрести навыки самостоятельной деятельности. Студенту предоставляется возможность работать во время учёбы более самостоятельно, чем учащимся в средней школе. Студент должен уметь планировать и выполнять свою работу.

Максимальное количество часов на дисциплину, предусмотренное учебным планом, составляет - 72 часа, в том числе:

обязательная аудиторная нагрузка обучающегося - **48** часов;

самостоятельная работа обучающегося - **24** часа.

Удельный вес самостоятельной работы составляет по времени 50% от количества аудиторных часов, отведённых на изучение дисциплины. Самостоятельная работа студентов является обязательной для каждого студента и определяется учебным планом.

При определении содержания самостоятельной работы студентов следует учитывать их уровень самостоятельности и требования к уровню самостоятельности выпускников для того, чтобы за период обучения искомый уровень был достигнут.

Для организации самостоятельной работы необходимы следующие условия:

- готовность студентов к самостоятельной деятельности;
- наличие и доступность необходимого учебно-методического и справочного материала;
- консультационная помощь от преподавателя.

Формы самостоятельной работы студентов определяются при разработке рабочих программ учебных дисциплин, содержанием учебной дисциплины, учитывая степень подготовленности студентов.

В результате освоения учебной дисциплины «Математика» в соответствии со ФГОС СПО для специальности «Технология машиностроения» студент должен **уметь**:

- анализировать сложные функции и строить их графики;
- выполнять действия над комплексными числами;
- вычислять значения геометрических величин;
- производить операции над матрицами и определителями;
- решать задачи на вычисление вероятности с использованием элементов комбинаторики;
- решать прикладные задачи с использованием элементов дифференциального и интегрального исчислений;
- решать системы линейных уравнений различными методами;

В результате освоения учебной дисциплины студент должен **знать**:

- основные математические методы решения прикладных задач;
- основные понятия и методы математического анализа, линейной алгебры,
- теорию комплексных чисел, теории вероятностей и математической статистики;
- основы интегрального и дифференциального исчисления;
- роль и место математики в современном мире при освоении профессиональных дисциплин и в сфере профессиональной деятельности

В процессе освоения дисциплины у студентов должны формироваться общие компетенции (ОК):

ОК 4. Осуществлять поиск и использование информации, необходимой для эффективного выполнения профессиональных задач, профессионального и личностного развития.

ОК 5. Использовать информационно-коммуникационные технологии в профессиональной деятельности.

ОК 8. Самостоятельно определять задачи профессионального и личностного развития, заниматься самообразованием, осознанно планировать повышение квалификации.

В процессе освоения дисциплины у студентов должны формироваться профессиональные компетенции (ПК):

ПК 1.4. Разрабатывать и внедрять управляющие программы обработки деталей.

ПК 1.5. Использовать системы автоматизированного проектирования технологических процессов обработки деталей.

ПК 3.2. Проводить контроль соответствия качества деталей требованиям технической документации.

2. Виды самостоятельных работ

В учебном процессе выделяют два вида самостоятельной работы:

- аудиторная;
- внеаудиторная.

Аудиторная самостоятельная работа по дисциплине выполняется на учебных занятиях под непосредственным руководством преподавателя и по его заданию.

Внеаудиторная самостоятельная работа выполняется студентом по заданию преподавателя, но без его непосредственного участия.

Содержание внеаудиторной самостоятельной определяется в соответствии с рекомендуемыми видами заданий согласно примерной и рабочей программ учебной дисциплины.

Согласно Положения об организации внеаудиторной самостоятельной работы студентов на основании компетентностного подхода к реализации профессиональных образовательных программ, видами заданий для внеаудиторной самостоятельной работы являются:

- *для овладения знаниями*: чтение текста (учебника, первоисточника, дополнительной литературы), составление плана текста, графическое изображение структуры текста, конспектирование текста, выписки из текста, работа со словарями и справочниками, ознакомление с нормативными документами, учебно-исследовательская работа, использование аудио - и видеозаписей, компьютерной техники и Интернета и др.
- *для закрепления и систематизации знаний*: работа с конспектом лекции, обработка текста, повторная работа над учебным материалом (учебника, первоисточника, дополнительной литературы, аудио и видеозаписей, составление плана, составление таблиц для систематизации учебного материала, ответ на контрольные вопросы, заполнение рабочей тетради, аналитическая обработка текста (аннотирование, рецензирование, реферирование, конспект-анализ, самостоятельный вывод формул и др.), завершение аудиторных лабораторно-практических работ и оформление отчётов по ним, подготовка мультимедиа сообщений/докладов к выступлению на семинаре (конференции), материалов-презентаций, подготовка реферата, составление библиографии, тематических кроссвордов, тестирование и др.
- *для формирования умений*: решение задач и упражнений по образцу, решение вариативных задач, выполнение чертежей, схем, выполнение расчетов (индивидуальных работ), решение ситуационных (профессиональных) задач, подготовка к деловым играм, проектирование и моделирование разных видов и компонентов профессиональной деятельности, опытно-экспериментальная работа, рефлексивный анализ профессиональных умений с использованием аудио- и видеотехники и др.

Самостоятельная работа может осуществляться индивидуально или группами студентов в зависимости от цели, объема, конкретной тематики самостоятельной работы, уровня сложности, уровня умений студентов.

Контроль результатов внеаудиторной самостоятельной работы студентов может осуществляться в пределах времени, отведенного на обязательные учебные занятия по дисциплине и внеаудиторную самостоятельную работу студентов по дисциплине, может проходить в письменной, устной или смешанной форме.

Внеаудиторная самостоятельная работа студентов по математике разбивается на следующие виды:

- подготовка докладов и информационных сообщений на заданные темы и их слайдового сопровождения;
- подготовка и написание рефератов;
- самостоятельный вывод формул с использованием дополнительной литературы;
- завершение аудиторных лабораторно-практических работ и оформление отчётов;
- написание конспекта;
- выполнение домашних заданий (упражнений, примеров, задач по изучаемым темам, вывод формул);
- выполнение исследовательских, проектных и индивидуальных работ и оформление отчётов по ним;
- создание материала-презентации;
- разработка тематических кроссвордов.

Чтобы развить положительное отношение студентов к внеаудиторной самостоятельной деятельности, преподавателю следует на каждом её этапе разъяснять цели работы, контролировать понимание этих целей студентами, постепенно формируя у них умение самостоятельной постановки задачи и выбора цели.

3. Перечень самостоятельных работ по математике

Наименование тем	Код формируемой компетенции	Результат освоения (умения и знания)		Вид деятельности	Оценочные средства
		уметь	знать		
Раздел 1. Введение. Математический анализ. Тема 1.1 Дифференциальное и интегральное исчисление.	ОК4, ОК5, ОК8, ПК1.4, ПК1.5, ПК3.2	решать прикладные задачи с использованием элементов дифференциального и интегрального исчисления	основные понятия и методы математического анализа; основы дифференциального исчисления; роль и место математики в современном мире при освоении профессиональных дисциплин и в сфере профессиональной деятельности	**Входной контроль**	Приложение 1
				Практическое занятие № 1 «Вычисление пределов функций, исследование функций и построение их графиков»	Практическая работа Приложение 2
				Самостоятельная работа: Подготовка к устному/письменному опросу по теме «Дифференциальное исчисление»	Вопросы к теме Приложение 3
				Самостоятельная работа: Решение примеров по образцу по теме «Дифференциальное исчисление»	Задание Приложение 4
				Практическое занятие №2 «Вычисление неопределенных интегралов различными способами»	Практическая работа Приложение 2
				Самостоятельная работа: Решение примеров по образцу по теме «Исследование и построение графиков сложных функций»	Задание Приложение 4
				Самостоятельная работа: Индивидуальное задание №1 «Построение графиков функций с помощью производной»	Задание Приложение 5
				Самостоятельная работа: Подготовка к устному/письменному опросу по теме «Интегральное исчисление»	Вопросы к теме Приложение 3
				Самостоятельная работа: Подготовка к практической работе «Вычисление неопределенных интегралов различными способами»	Приложение 4
				Самостоятельная работа: Подготовка презентаций и (или) докладов, сообщений, рефератов по теме «Роль и место математики в современном мире при освоении профессиональных дисциплин и в сфере профессиональной деятельности», «Выдающиеся личности в математике»	Презентация/доклад/ сообщение/ реферат
Тема 1.2. Приложения производной и определенного интеграла.	ОК4, ОК5, ОК8, ПК1.4, ПК1.5, ПК3.2	решать прикладные задачи с использованием элементов	основные понятия и методы математического анализа;	**Практическое занятие № 3** «Решение прикладных задач (Приложения производной и интеграла)»	Практическая работа Приложение 2
				Самостоятельная работа: Подготовка к устному/письменному опросу по теме «Вычисление площадей с помощью интегралов. Приложения определенного интеграла»	Вопросы к теме Приложение 3

Наименование тем	Код формируемой компетенции	Результат освоения (умения и знания)		Вид деятельности	Оценочные средства
		уметь	знать		
		дифференциального и интегрального исчисления	основные математические методы решения прикладных задач; роль и место математики в современном мире при освоении профессиональных дисциплин и в сфере профессиональной деятельности	**Самостоятельная работа**: Решение примеров по образцу по теме «Приложения производной и интеграла»	Задание Приложение 4
				Самостоятельная работа: Подготовка к практической работе по теме «Решение прикладных задач»	Приложение 4
Раздел 2. Основы теории комплексных чисел.	ОК4, ОК5, ОК8, ПК1.4, ПК1.5, ПК3.2	выполнять действия над комплексными числами	теория комплексных чисел; роль и место математики в современном мире при освоении профессиональных дисциплин и в сфере профессиональной деятельности	**Практическое занятие № 4** «Выполнение действий над комплексными числами, заданными в алгебраической форме»	Практическая работа Приложение 2
Тема 2.1 Теория комплексных чисел. Действия над комплексными числами.				**Самостоятельная работа:** Подготовка к устному/письменному опросу по теме «Теория комплексных чисел»	Вопросы к теме Приложение 3
				Самостоятельная работа: Решение примеров по образцу по теме «Действия над комплексными числами, заданными в алгебраической форме»	Задание Приложение 4
				Самостоятельная работа: Подготовка к практической работе «Действия над комплексными числами, заданными в алгебраической форме»	Приложение 4
				Практическое занятие № 5 «Представление комплексных чисел в тригонометрической форме. Действия над ними»	Практическая работа Приложение 2
				Самостоятельная работа: Решение примеров по образцу по теме «Действия над комплексными числами, заданными в тригонометрической форме»	Задание Приложение 4

Наименование тем	Код формируемой компетенции	Результат освоения (умения и знания)		Вид деятельности	Оценочные средства
		уметь	знать		
				Самостоятельная работа: Подготовка к практической работе «Действия над комплексными числами, заданными в тригонометрической форме»	Приложение 4
				Самостоятельная работа: Подготовка презентаций и (или) докладов, сообщений, рефератов по теме «История открытия комплексных чисел»	Презентация/доклад/ сообщение/ реферат
Раздел 3. Элементы линейной алгебры Тема 3.1. Матрицы и определители.	ОК4, ОК5, ОК8, ПК1.4, ПК1.5, ПК3.2	производить операции над матрицами и определителями	основные понятия и методы линейной алгебры; роль и место математики в современном мире при освоении профессиональных дисциплин и в сфере профессиональной деятельности	**Практическое занятие № 6** «Операции над матрицами. Нахождение обратной матрицы. Вычисление ранга матрицы. Вычисление определителей»	Практическая работа Приложение 2
				Самостоятельная работа: Подготовка к устному/письменному опросу по теме «Основные понятия и методы линейной алгебры»	Вопросы к теме Приложение 3
				Самостоятельная работа: Решение примеров по образцу по теме «Матрицы и определители»	Задание Приложение 4
				Самостоятельная работа: Подготовка к практической работе «Операции над матрицами. Нахождение обратной матрицы. Вычисление ранга матрицы. Вычисление определителей»	Приложение 4
				Самостоятельная работа: Индивидуальное задание №2 «Выполнение операций над матрицами»	Задание Приложение 5
Тема 3.2 Системы линейных алгебраических уравнений	ОК4, ОК5, ОК8, ПК1.4, ПК1.5, ПК3.2	решать системы линейных уравнений различными методами	основные понятия и методы линейной алгебры; роль и место математики в современном	**Практическое занятие № 7 «**Решение систем линейных алгебраических уравнений различными способами»	Практическая работа Приложение 2
				Самостоятельная работа: Подготовка к устному/письменному опросу по теме «Методы решения систем линейных алгебраических уравнений»	Вопросы к теме Приложение 3
				Самостоятельная работа: Решение примеров по образцу по теме «Методы решения систем линейных алгебраических уравнений»	Задание Приложение 4

Наименование тем	Код формируемой компетенции	Результат освоения (умения и знания)		Вид деятельности	Оценочные средства
		уметь	знать		
			мире при освоении профессиональных дисциплин и в сфере профессиональной деятельности	**Самостоятельная работа:** Подготовка к практической работе «Решение систем линейных алгебраических уравнений различными способами»	Приложение 4
				Самостоятельная работа: Подготовка презентаций и (или) докладов, сообщений, рефератов по теме «Выдающиеся личности в математике»	Презентация/доклад/ сообщение/ реферат
Раздел 4. Геометрия.	ОК4, ОК5, ОК8, ПК1.4, ПК1.5, ПК3.2	вычислять значения геометрических величин; решать прикладные задачи с использованием элементов дифференциального исчисления	основные понятия и методы математического анализа, линейной алгебры; основные математические методы решения прикладных задач; роль и место математики в современном мире при освоении профессиональных дисциплин и в сфере профессиональной деятельности	**Практическое занятие №8** «Вычисление геометрических величин на модели многогранников и тел вращения»	Практическая работа Приложение 2
				Самостоятельная работа: Подготовка к устному/письменному опросу по теме «Тела и поверхности в пространстве»	Вопросы к теме Приложение 3
				Самостоятельная работа: Решение примеров по образцу по теме «Вычисление геометрических величин на моделях многогранников и тел вращения»	Задание Приложение 4
				Самостоятельная работа: Подготовка к практической работе «Вычисление геометрических величин на модели многогранников и тел вращения»	Приложение 4
				Практическое занятие №9 «Вычисление экстремальных значений геометрических величин»	Практическая работа Приложение 2
				Самостоятельная работа: Решение примеров по образцу по теме «Вычисление экстремальных значений геометрических величин»	Задание Приложение 4
				Самостоятельная работа: Подготовка к практической работе «Вычисление экстремальных значений геометрических величин»»	Приложение 4
				Самостоятельная работа: проектно-исследовательская работа по темам «Коническое отверстие», «Средний диаметр резьбы», «Расточка эксцентриков»	Проект Приложение 6

Наименование тем	Код формируемой компетенции	Результат освоения (умения и знания)		Вид деятельности	Оценочные средства
		уметь	**знать**		
Раздел 5. Основы теории вероятностей и математической статистики	ОК4, ОК5, ОК8, ПК1.4, ПК1.5, ПК3.2	решать задачи на вычисление вероятности с использованием элементов комбинаторики	основные математические методы решения прикладных задач; основные понятия и методы теории вероятностей; роль и место математики в современном мире при освоении профессиональных дисциплин и в сфере профессиональной деятельности	**Практическое занятие № 10** «Решение задач на определение вероятности с использованием теорем сложения и умножения»	Практическая работа Приложение 2
				Самостоятельная работа: Подготовка к устному/письменному опросу по теме «Основные понятия и методы теории вероятностей»	Вопросы к теме Приложение 3
				Самостоятельная работа: Решение примеров по образцу по теме «Вычисления вероятностей. Решение простейших задач комбинаторики»	Задание Приложение 4
				Самостоятельная работа: Подготовка к практической работе «Решение задач на определение вероятности с использованием теорем сложения и умножения»	Приложение 4
				Практическое занятие № 11 «Построение закона распределения дискретной случайной величины»	Практическая работа Приложение 2
				Самостоятельная работа: Решение примеров по образцу по теме «Построение закона распределения дискретной случайной величины»	Задание Приложение 4
				Самостоятельная работа: Подготовка к практической работе «Построение закона распределения дискретной случайной величины»	Приложение 5
				Практическое занятие № 12 «Нахождение характеристик случайной величины»	Практическая работа Приложение 2
				Самостоятельная работа: Решение примеров по образцу по теме «Характеристики случайной величины»	Задание Приложение 4
				Самостоятельная работа: Подготовка к практической работе «Нахождение характеристик случайной величины»	Приложение 4
	ОК4, ОК5,	анализировать сложные функции и	основные математические	Итоговое повторение	Тестирование Приложение 5

Наименование тем	Код формируемой компетенции	Результат освоения (умения и знания)		Вид деятельности	Оценочные средства
		уметь	знать		
Обобщающее занятие по разделам курса	ОК8, ПК1.4, ПК1.5, ПК3.2	строить их графики; выполнять действия над комплексными числами; вычислять значения геометрических величин; производить операции над матрицами и определителями; решать задачи на вычисление вероятности с использованием элементов комбинаторики; решать прикладные задачи с использованием элементов дифференциального и интегрального исчисления; решать системы линейных уравнений различными методами	методы решения прикладных задач; основные понятия и методы математического анализа, линейной алгебры, теорию комплексных чисел, теорию вероятностей и математической статистики; основы дифференциального и интегрального исчисления	**Самостоятельная работа:** Составление тематического кроссворда по изученным темам за семестр	Кроссворд
Дифференцированный зачет					Билеты Приложение 7

Приложение 1

Входной контроль знаний студентов

Пояснительная записка

Цель входного контроля знаний: выявить уровень знаний, умений и навыков студентов 2 курса, полученных при изучении математики на первом курсе.

Форма работы: письменная тестовая работа.

Время, отводимое на выполнение работы: 80 мин

Описание работы:

Работа состоит из трех частей (1 часть с выбором ответа, 2 часть краткий ответ, 3 часть подробное решение)

Темы, подлежащие диагностике:

- *Уравнения с одной переменной. Решение уравнений. Основные приемы их решения. Решение уравнений с модулем. Рациональные уравнения и методы их решения.*
- *Решение неравенств. Равносильность неравенств. Метод интервалов. Рациональные неравенства, методы их решения.*
- *Проценты.*
- *Свойства функции: чётность, нечётность, периодичность, монотонность, экстремумы, сохранение знака. Графическая интерпретация.*
- *Производная функции. Геометрический смысл производной.*
- *Корни и степени. Корни натуральной степени из числа и их свойства. Степени с рациональными показателями, их свойства. Степень с произвольным действительным показателем и ее свойства.*
- *Решение показательных уравнений и неравенств.*
- *Логарифмы. Свойства логарифмов. Десятичные и натуральные логарифмы. Тождественные преобразования логарифмических выражений. Формула перехода от логарифма по одному основанию к логарифму по другому основанию.*
- *Решение логарифмических уравнений и неравенств.*
- *Тригонометрические формулы (основные, формулы приведения, формулы сложения и их следствия, формулы двойного угла, формулы суммы и разности тригонометрических функций).*
- *Решение практических задач по геометрии.*
- *Решение задач на перебор вариантов, вероятности.*
- *Действия над комплексными числами.*

Критерии оценки

За каждое задание первой части выставляется 2 балла, за каждое задание второй части 3 балла.

Максимальное количество баллов 1 части – 34 баллов, 3 часть – 9 баллов.

Итого максимальное количество баллов - 43.

40 - 43 баллов - оценка «отлично»

30- 39 баллов – оценка «хорошо»

21 – 29 баллов – оценка «удовлетворительно»

0 – 20 баллов – оценка «неудовлетворительно»

Вариант 1

Инструкция

На выполнение работы по математике дается часа (80 мин). Работа состоит из двух частей и содержит 20 заданий.

Часть В содержит 17 заданий (В1–В17). К заданиям В1–В17 надо дать краткий ответ.

Часть С содержит 3 задания (С1 - С3). При их выполнении надо записать обоснованное решение.

Советуем для экономии времени пропускать задание, которое не удается выполнить сразу, и переходить к следующему. К выполнению пропущенных заданий можно вернуться, если у вас останется время.

Желаем успеха!

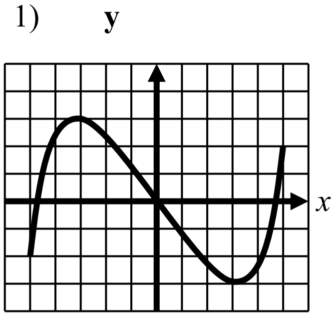
Часть В.

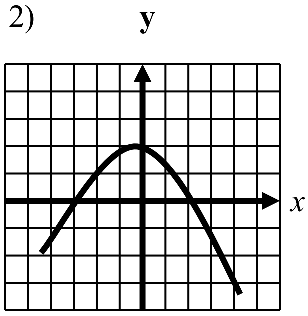
При выполнении заданий В1-В17 этой части надо дать краткий ответ. При выполнении задания В3 выберете ответ из предложенных. Впишите в таблицу цифру выбранного ответа.

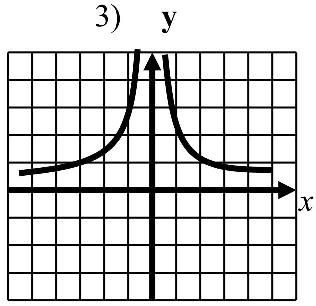
В1 Решите линейное уравнение $2(x + 2) = 3(x - 1)$;

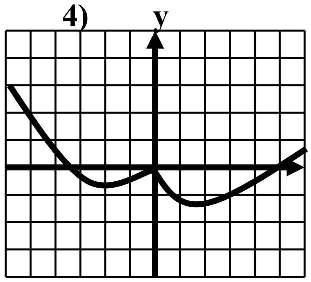
В2 Решите неравенство: $\frac{6x+18}{7x} \le 0$. В ответе укажите сумму целых решений данного неравенства.

В3 Укажите рисунок, на котором изображен график нечетной функции.

1)


2)


3)


4)


В4 Найдите область определения функции: $y = \sqrt{16 - x^2}$. В ответе напишите сумму натуральных решений данного неравенства.

В5 Вычислите: $\sqrt[3]{27} - \sqrt{49} \cdot \sqrt[3]{8}$.

В6 Найдите значение указанного выражения $\frac{2-5i}{5-2i}$. В ответе укажите действительную часть комплексного числа.

В7 Решите неравенство: $2^{10x-5} \ge \frac{1}{16}$. В ответе укажите наименьшее целое число, принадлежащее решению данного неравенства.

B8 Найдите значение выражения: $2\sin 30^0 + \cos 90^0 - tg 45^0$.

B9 Найдите значение выражения: $\log_3 75 + \log_3 (25)^{-1}$.

B10 Прямая $y = 3x + 1$ параллельна касательной к графику функции $y = x^2 + 2x + 3$. Найдите абсциссу точки касания.

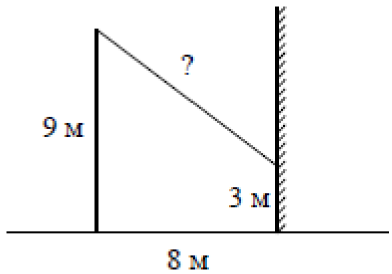
B11 Решите уравнение $|3x + 2| = 4$. Если уравнение имеет два корня, то в ответе укажите наименьший.

B12 Решите неравенство: $\log_2(1 - 0{,}3x) \le 4$. В ответе укажите количество натуральных чисел, принадлежащих решению данного неравенства.

B13 Шариковая ручка стоит 12 рублей. Какое наибольшее число таких ручек можно купить на 700 рублей после повышения цены на 25%?

B14 Вычислите: $\cos\frac{38\pi}{3}$.

B15 От столба высотой 9 м к дому натянут провод, который крепится на высоте 3 м от земли (см. рисунок). Расстояние от дома до столба 8 м. Вычислите длину провода.



B16 Решить уравнение: $9^x - 3^x - 6 = 0$. Если уравнение имеет два корня, то в ответе укажите наибольший.

B17 На тарелке лежат пирожки, одинаковые на вид: 4 с мясом, 8 с капустой и 3 с яблоками. Петя наугад выбирает один пирожок. Найдите вероятность того, что пирожок окажется с яблоками.

Часть С.

Для ответов на задания этой части С1 – С3 используйте бланк ответов. Запишите сначала номер задания (С1и т.д.), а затем решение и ответ к нему.

С1 Докажите тождество: $\frac{1}{1 + tg^2\alpha} + \frac{1}{1 + ctg^2\alpha} = 1$.

С2 В прямоугольном параллелепипеде АВСДА$_1$В$_1$С$_1$Д$_1$ известно, что ВД$_1$ = 3, СД = 2, АД = 2. Найдите длину ребра АА$_1$.

С3 Решить уравнение: $\log_3 x + 2\log_x 3 = 3$.

Вариант 2

Инструкция

На выполнение экзаменационной работы по математике дается 3 часа (80 мин). Работа состоит из двух частей и содержит 20 заданий.
Часть В содержит 17 заданий (В1–В17). К заданиям В1–В17 надо дать краткий ответ.
Часть С содержит 3 задания (С1 - С3). При их выполнении надо записать обоснованное решение.
Советуем для экономии времени пропускать задание, которое не удается выполнить сразу, и переходить к следующему. К выполнению пропущенных заданий можно вернуться, если у вас останется время.

Желаем успеха!

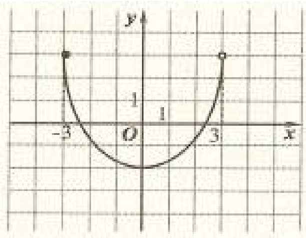
Часть В.

При выполнении заданий В1-В17 этой части надо дать краткий ответ. При выполнении задания В3 выберете ответ из предложенных. Впишите в таблицу цифру выбранного ответа.

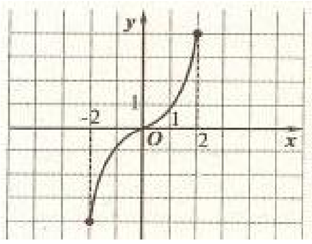
В1 Решите линейное уравнение $2x + (x + 1) = 3$

В2 Решите неравенство: $\dfrac{5x-15}{(x+6)(x-8)} > 0$. В ответе укажите сумму целых отрицательных решений данного неравенства.

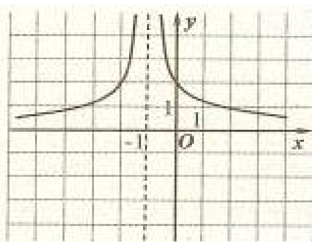
В3 Укажите рисунок, на котором изображен график нечетной функции.



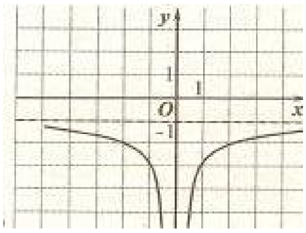
1)



2)



3)



4)

В4 Найдите область определения функции: $y = \sqrt{81 - x^2}$. В ответе напишите сумму натуральных решений данного неравенства.

В5 Вычислите: $\sqrt{25} \cdot \sqrt[5]{32} - 5$.

В6 Найдите значение выражения $\dfrac{3-5i}{5-3i}$. В ответе укажите мнимую часть комплексного числа.

В7 Решите неравенство: $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\tilde{o}+2} \ge 4$. В ответе укажите наибольшее целое число, принадлежащее решению данного неравенства.

В8 Найдите значение выражения: $5\sin 30^0 - ctg 45^0 + \cos 180^0$.

В9 Укажите значение выражения: $\log_2 50 - 2\log_2 5$.

В10 Прямая $y = 7x - 5$ параллельна касательной к графику функции $y = x^2+6x - 8$. Найдите абсциссу точки касания.

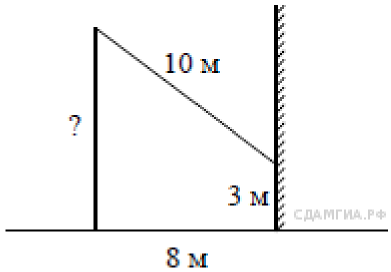
B11 Решить уравнение: $|-3-2x| = 1$. Если уравнение имеет два корня, то в ответе укажите наибольший.

B12 Решите неравенство: $\log_2(x-5) \le 1$. В ответе укажите количество натуральных чисел, принадлежащих решению данного неравенства.

B13 Железнодорожный билет для взрослого стоит 640 рублей. Стоимость билета для школьника составляет 50% от стоимости билета для взрослого. Группа состоит из 16 школьников и 3 взрослых. Сколько рублей стоят билеты на всю группу?

B14 Вычислите: $\sin(-570^0)$.

B15 От столба к дому натянут провод длиной 10 м, который закреплён на стене дома на высоте 3 м от земли (см. рисунок). Вычислите высоту столба, если расстояние от дома до столба равно 8 м.



B16 Решить уравнение: $4^x + 2^{x+1} - 8 = 0$. Если уравнение имеет два корня, то в ответе укажите наименьший.

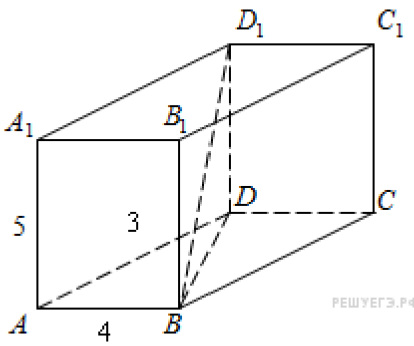
B17 У бабушки 20 чашек: 5 с красными цветами, остальные с синими. Бабушка наливает чай в случайно выбранную чашку. Найдите вероятность того, что это будет чашка с синими цветами.

Часть С.

Для ответов на задания этой части С1 – С3 используйте бланк ответов. Запишите сначала номер задания (С1и т.д.), а затем решение и ответ к нему.

C1 Докажите тождество: $(1-\sin\alpha)(1+\sin\alpha)-(\cos^2\alpha - tg^2\alpha) = tg^2\alpha$.

C2 Найдите угол ДВД$_1$ прямоугольного параллелепипеда, для которого АВ = 4, АД =3, АА$_1$ =5. Дайте ответ в градусах.



C3 Решить уравнение: $\log_2 x + \log_x 2 = 2{,}5$.

Бланк ответов

Ф.И.О.____

Группа______________

Вариант______________

Часть В.

В1.

В2.

В3.

В4.

В5.

В6.

В7.

В8.

В9.

В10.

В11.

В12.

В13.

В14.

В15.

В16.

В17.

Часть С.

Запишите сначала номер задания (С1и т.д.), а затем подробное решение и ответ к нему.

Эталоны ответов

Номера заданий	Вариант 1	Вариант 2

B1	7	2/3
B2	-6	-15
B3	1	2
B4	10	45
B5	-11	5
B6	20/29	-8/17
B7	1	-4
B8	0	0,5
B9	1	1
B10	0,5	0,5
B11	-2	-1
B12	3	2
B13	46	7040
B14	-0,5	0,5
B15	10	9
B16	1	1
B17	0,2	0,75
C2	1	45^0
C3	3;9	$\sqrt{2}$;4

Критерии оценивания выполнения задания С1	**Баллы**
Доказательство верное, все шаги обоснованы	3
Доказательство в целом верное, но содержит неточности	2
Другие случаи, не соответствующие указанным критериям	0
Максимальный балл	3
Критерии оценивания выполнения задания С2	**Баллы**
Обоснованно получен верный ответ	3
Ход решения верный, но получен неверный ответ или решение не закончено, или при правильном ответе решение недостаточно обосновано	2
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3
Критерии оценивания выполнения задания С3	**Баллы**
Получен верный обоснованный ответ	3
При верных рассуждениях допущена вычислительная ошибка, возможно приведшая к неверному ответу	2
Другие случаи, не соответствующие указанным критериям	0
Максимальный балл	3

Приложение 2

Задания для проведения практических работ
по дисциплине «Математика»

Практическая работа №1

Тема: Вычисление пределов функций, исследование функций и построение графиков.

Цель: сформировать умение находить пределы функций, использовать замечательные пределы для нахождения пределов; исследовать функцию и строить график функции.

Практическая работа состоит из двух частей – теоретической и практической. После изучения теоретического материала можно приступать к выполнению практической части. Она состоит из одной или более задач для самостоятельного выполнения. Не забывайте о правильном оформлении решения.

Порядок выполнения работы

1. Рассмотрите теоретический материал по теме и примеры решения задач (приведены ниже).

2. Решите задачи для самостоятельного выполнения. Оформите решение письменно в тетради для практических работ.

Теоретические сведения к практической работе

Число A называют *пределом функции* $f(x)$ при $x \to x_0$ (и пишут $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$), если для любого $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta > 0$, зависящее от , такое, что для всех $x \neq x_0$, удовлетворяющих условию $|x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Теоремы о пределах:

1. $\lim\limits_{x \to x_0} c = c$ (c=const).

2. Если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A,\ \lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = B,$ то:

$$\lim_{x \to x_0}(f(x) \pm \varphi(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) \pm \lim_{x \to x_0} \varphi(x) = A \pm B;$$

$$\lim_{x \to x_0}(f(x) \cdot \varphi(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} \varphi(x) = A \cdot B;$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x)} = \frac{A}{B}, \quad (B \neq 0).$$

Первый замечательный предел: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1.$

Второй замечательный предел (число e = 2,718…):

$$\lim_{x \to \infty}(1 + 1/x)^x = e \text{ или } \lim_{x \to 0}(1 + x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

Замечательные пределы:

$$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a; \quad \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \quad \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = 1 \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\log_a(1 + \mathrm{x})}{x} = \log_a e$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{(1 + x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$$

Пример 1. Вычислить предел $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{5 \sin 8x}{6x}$

$$\lim_{x \to 0} \frac{5 \sin 8x}{6x}^{\left[\frac{0}{0}\right]} = \lim_{x \to 0} \frac{5 \sin 8x \cdot 8}{6 \cdot 8x} = \frac{5 \cdot 8}{6} = \frac{40}{6} = \frac{20}{3}$$

Пример 2. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+5x)}{x}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+5x)}{x}\overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=}\lim_{x\to 0}\frac{5\ln(1+5x)}{5x}=5$$

Пример 3. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}(1+5x)^{\frac{1}{3x}}$

$$\lim_{x\to 0}(1+5x)^{\frac{1}{3x}}\overset{\left[1^{\infty}\right]}{=}\lim_{x\to 0}(1+5x)^{\frac{1}{5x}\cdot 5x\cdot\frac{1}{3x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\left(5x\cdot\frac{1}{3x}\right)}=e^{\frac{5}{3}}$$

Пример 4. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+4}{x^2+1}\right)^x$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+4}{x^2+1}\right)^x\overset{\left[1^{\infty}\right]}{=}\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1+3}{x^2+1}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x^2+1}\right)^x=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x^2+1}{3}}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x^2+1}{3}}\right)^{\frac{x^2+1}{3}\cdot\frac{3}{x^2+1}\cdot x}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3}{x^2+1}\cdot x}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x}{x^2+1}}=e^0=1$$

Чтобы найти предел элементарной функции $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ нужно предельное значение аргумента подставить в функцию и посчитать. При этом, если $x = x_0$ принадлежит области определения функции, то значение предела будет найдено, оно равно значению функции в точке $x = x_0$.

При вычислении пределов полезно использовать следующие соотношения.

Если c = const, $c \neq 0$, $c \neq \infty$ то, учитывая свойства бесконечно больших и бесконечно малых функций, получим:

$\frac{0}{c}\to 0$; $\frac{c}{0}\to\infty$; $\frac{\infty}{c}\to\infty$; $c\cdot\infty\to\infty$; $c\cdot 0\to 0$; $a^{\infty}\to 0$, если 0 < a < 1; $a^{\infty}\to\infty$, если a > 1.

Случаи, в которых подстановка предельного значения аргумента в функцию не дает значения предела, называют неопределенностями; к ним относятся неопределенности видов:

$$\left(\frac{\infty}{\infty}\right);\ \left(\frac{0}{0}\right);\ (0\cdot\infty);\ (\infty-\infty);\ (1^{\infty});\ (\infty^0);\ (0^0).$$

Пример 5. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x^3+15}{10x^2-4}$

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x^3+15}{10x^2-4}=\lim_{x\to 1}\frac{2\cdot 1^3+15}{10\cdot 1^2-4}=\frac{2+15}{10-4}=\frac{17}{6}$$

Пример 6. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x^2-16}{x^2-5x+4}$

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^2-16}{x^2-5x+4}\overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=}\lim_{x\to 4}\frac{(x-4)(x+4)}{(x-4)(x-1)}=\lim_{x\to 4}\frac{(x+4)}{(x-1)}=\lim_{x\to 4}\frac{(4+4)}{(4-1)}=\frac{8}{3}$$

Пример 7. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 5}\frac{\sqrt{2x+8}-\sqrt{23-x}}{x-5}$

$$\lim_{x\to 5}\frac{\sqrt{2x+8}-\sqrt{23-x}}{x-5}\overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=}\lim_{x\to 5}\frac{\left(\sqrt{2x+8}-\sqrt{23-x}\right)\left(\sqrt{2x+8}+\sqrt{23-x}\right)}{(x-5)\left(\sqrt{2x+8}+\sqrt{23-x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 5}\frac{\left(\left(\sqrt{2x+8}\right)^2-\left(\sqrt{23-x}\right)^2\right)}{(x-5)\left(\sqrt{2x+8}+\sqrt{23-x}\right)}=\lim_{x\to 5}\frac{\left((2x+8)-(23-x)\right)}{(x-5)\left(\sqrt{2x+8}+\sqrt{23-x}\right)}=\lim_{x\to 5}\frac{(2x+8-23+x)}{(x-5)\left(\sqrt{2x+8}+\sqrt{23-x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 5}\frac{(3x-15)}{(x-5)\left(\sqrt{2x+8}+\sqrt{23-x}\right)}=\lim_{x\to 5}\frac{3(x-5)}{(x-5)\left(\sqrt{2x+8}+\sqrt{23-x}\right)}=\lim_{x\to 5}\frac{3}{\left(\sqrt{2x+8}+\sqrt{23-x}\right)}=$$

$$=\frac{3}{\left(\sqrt{2\cdot 5+8}+\sqrt{23-5}\right)}=\frac{3}{\left(\sqrt{18}+\sqrt{18}\right)}=\frac{3}{2\sqrt{18}}=\frac{3}{2\cdot 3\sqrt{2}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{1\cdot 2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2}}{4\cdot 2}=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

Методы математического анализа позволяют строить достаточно точный график заданной функции, если только удается хорошо изучить свойства этой функции.

Изложение свойств функции при построении графика целесообразно проводить по следующей схеме:

I. Нахождение области определения и точек разрыва; вычисление значений функции (или соответствующих пределов) в граничных точках области определения. Определение четности или нечетности, периодичности функции.

II. Определение нулей функции и интервалов знакопостоянства.

III. Нахождение асимптот.

IV. Исследование функции на экстремум, определение интервалов монотонности.

V. Нахождение точек перегиба и интервалов выпуклости и вогнутости.

Пример 7. Исследовать и построить график функции $y=x^2\cdot e^{\frac{1}{x}}$.

Исследуем функцию по плану, представленному выше.

1. $D(y)=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$, $x=0$ - точка разрыва.

Граничные значения: $\lim\limits_{x\to-\infty}x^2e^{\frac{1}{x}}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2e^{\frac{1}{x}}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 0-0}x^2e^{\frac{1}{x}}=0$, $\lim\limits_{x\to 0+0}x^2e^{\frac{1}{x}}=+\infty$. Отсюда следует, что прямая $x=0$ является вертикальной асимптотой.

2. Функция общего вида, непериодическая.

3. С координатными осями данная функция не пересекается, график функции лежит выше оси Ox.

4. Найдем параметры наклонной асимптоты: $k=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2\cdot e^{\frac{1}{x}}}{x}=\infty$. Наклонных асимптот нет.

5. Найдем производную: $y'=e^{\frac{1}{x}}\cdot(2x-1)$. Решаем уравнение: $y'=0$, то есть $y'=e^{\frac{1}{x}}\cdot(2x-1)=0$, откуда $x=\frac{1}{2}$ является критической точкой. При $x>\frac{1}{2}$ $y'>0$, а при $x<\frac{1}{2}$ $y'<0$. Следовательно, в точке с абсциссой $x=\frac{1}{2}$ имеется минимум. Ордината точки

минимума $y_{\min} = \frac{e^2}{4} \approx 1{,}87$. Функция монотонно убывает на интервалах $(-\infty,0)$; $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ и монотонно возрастает на интервале $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$.

6. Найдем вторую производную: $y' = \frac{e^{\frac{1}{x}}\cdot\left(2x^2-2x+1\right)}{x^2} > 0$. Точек перегиба нет. График функции на интервалах $(-\infty,0);(0,+\infty)$ вогнутый.

График функции изображен на рис. 1.

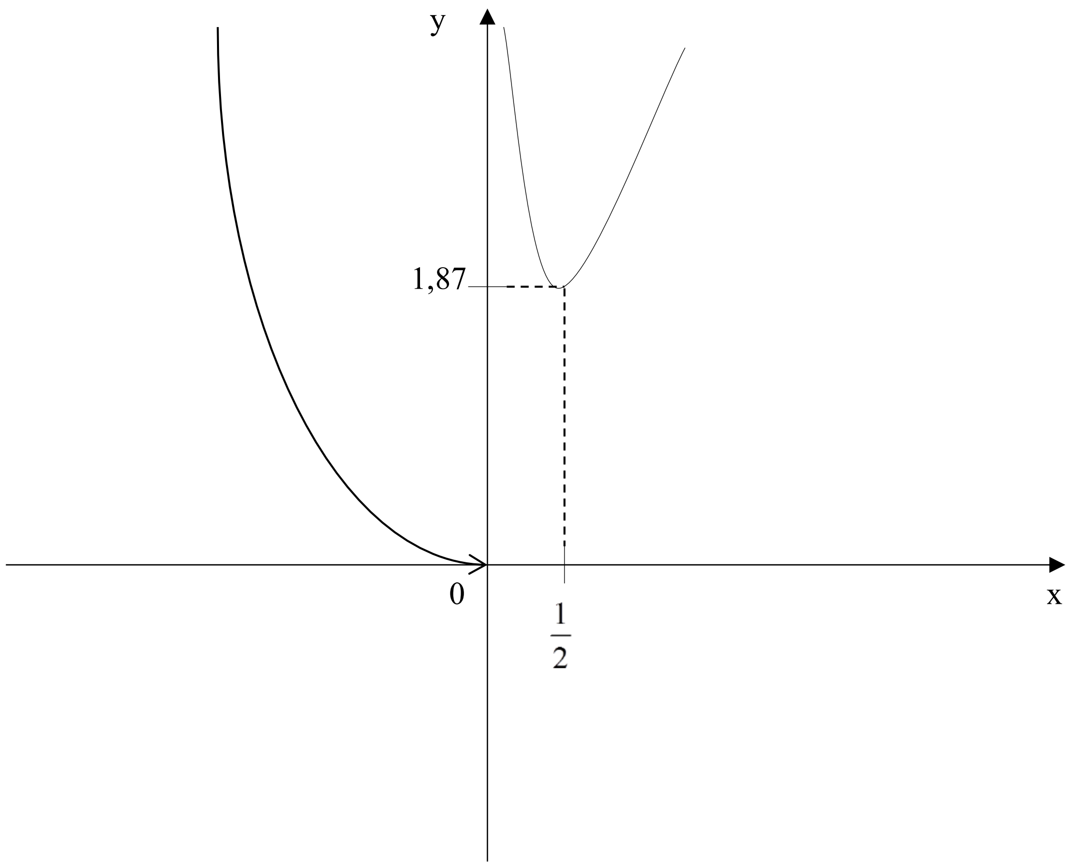


Рис.1.

Содержание практической работы

Задание 1. Вычислить пределы функций (9 баллов):

$1)\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^4+2x^2-3x}{x^3-3x^2+x}$ $\quad 2)\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-3x-2}{x^2+x}$ $\quad 3)\lim\limits_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{1+x}-1\right)}{x^2}$

$4)\lim\limits_{x\to 4}\frac{\left(\sqrt{1+2x}-3\right)}{\sqrt{x}-2}$ $\quad 5)\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{x^2-1}$ $\quad 6)\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x+1)^2+(x-1)^2}{(x-1)^2-(x+1)^2}$

$7)\lim\limits_{x\to -2}\frac{\sqrt[3]{x^3+2x-1}}{x+2}$ $\quad 8)\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^3-15x^2+x}{18x^2+15x}$ $\quad 9)\lim\limits_{x\to 2}\frac{\left(\sqrt{4x-7}-\sqrt{x+2}\right)}{x-2}$

Задание 2. Вычислить пределы функций, используя замечательные пределы (9 баллов):

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+3}{x^2}\right)^{x^2+1}$ 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^{x}$ 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$

4) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+10x^2\right)^{x^3\cdot\frac{1}{x}}$ 5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1+\sin x\right)}{\sin 4x}$ 6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^2-5x}{\sin 4x}$

7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg3x}{tgx}$ 8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{9\ln(1-2\,\text{x})}{4arctg3x}$ 9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 7x}{\sin x\cdot x^2}$

Задание 3. Исследовать функцию и построить её график $y=\dfrac{x^2}{x-2}$ (4 балла)

Критерии оценки	
Количество набранных баллов	Оценка
Менее 10	2
10-13	3
14-17	4
18-22	5

Практическая работа №2

Тема: Вычисление неопределенных интегралов различными способами.

Цель: сформировать умение вычислять неопределенные интегралы, используя различные методы интегрирования.

Практическая работа состоит из двух частей – теоретической и практической. После изучения теоретического материала можно приступать к выполнению практической части. Она состоит из одной или более задач для самостоятельного выполнения. Не забывайте о правильном оформлении решения.

Порядок выполнения работы

1. Рассмотрите теоретический материал по теме и примеры решения задач (приведены ниже).
2. Решите задачи для самостоятельного выполнения. Оформите решение письменно в тетради для практических работ.

Теоретические сведения к практической работе

Функция $F\left(x\right)$, определенная на интервале $\left(a,b\right)$, называется *первообразной* для функции $f\left(x\right)$, определенной на том же интервале $\left(a,b\right)$, если $F'\left(x\right)=f\left(x\right)$.

Если $F\left(x\right)$ — первообразная для функции $f\left(x\right)$, то любая другая первообразная $\Phi\left(x\right)$ для функции $f\left(x\right)$ отличается от $F\left(x\right)$ на некоторое постоянное слагаемое, т. е. $\Phi\left(x\right)=F\left(x\right)+C,$ где C — const.

Неопределенным интегралом от функции $f\left(x\right)$ называется совокупность всех первообразных для этой функции. Обозначается неопределенный интеграл: $\int f\left(x\right)dx=F\left(x\right)+C,$ где $F'\left(x\right)=f\left(x\right)$, C — const.

Операция нахождений первообразной для данной функции называется *интегрированием*. Интегрирование является обратной операцией к дифференцированию:

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x).$$

Для проверки правильности выполненного интегрирования необходимо продифференцировать результат интегрирования и сравнить полученную функцию с подынтегральной.

Свойства неопределенного интеграла:

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x); \quad d\int f(x)dx = f(x)dx;$
2. $\int dF(x) = F(x) + C;$
3. $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx, \qquad k$ — const;
4. $\int \left(f(x) + g(x)\right)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$

Таблица основных интегралов

1. $\int 0du = C; \quad C = \text{const};$
2. $\int du = u + C;$
3. $\int u^{\alpha}du = \dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq -1;$

3а. $\int \dfrac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C;$

4. $\int \dfrac{du}{u} = \ln|u| + C;$
5. $\int a^u du = \dfrac{a^u}{\ln a} + C;$
6. $\int e^u du = e^u + C;$
7. $\int \cos u\, du = \sin u + C;$
8. $\int \sin u\, du = -\cos u + C;$
9. $\int \dfrac{du}{\cos^2 u} = \text{tg} u + C;$
10. $\int \dfrac{du}{\sin^2 u} = -\text{ctg} u + C;$
11. $\int \dfrac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin\dfrac{u}{a} + C;$
12. $\int \dfrac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + C;$
13. $\int \dfrac{du}{u^2 + a^2} = \dfrac{1}{a}\text{arctg}\dfrac{u}{a} + C;$
14. $\int \dfrac{du}{u^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{u-a}{u+a}\right| + C;$
15. $\int \dfrac{du}{\sin u} = \ln\left|\text{tg}\dfrac{u}{2}\right| + C;$
16. $\int \dfrac{du}{\cos u} = \ln\left|\text{tg}\left(\dfrac{u}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)\right| + C;$
17. $\int \text{tg} u\, du = -\ln|\cos u| + C;$
18. $\int \text{ctg}\, u du = \ln|\sin u| + C.$

Каждая из приведенных в таблице формул справедлива на промежутке, не содержащем точек разрыва подынтегральной функции. Вычисление интегралов с использованием таблицы и основных свойств называют непосредственным интегрированием.

Пример 1. Пользуясь таблицей основных интегралов и свойствами неопределенного интеграла, найти интегралы (результат интегрирования проверить дифференцированием):

$a)\int\left(\dfrac{5}{\sqrt{x^2+7}} - \dfrac{3x^3+1}{x^4} + 2\sqrt[6]{x^5}\right)dx; \qquad$ б)$\int\left(\dfrac{5}{11x^2+2} + 3\cdot 5^x + \dfrac{16-x^2}{4+x}\right)dx.$

Решение.

$$a)\int\left(\frac{5}{\sqrt{x^2+7}}-\frac{3x^3+1}{x^4}+2\sqrt[6]{x^5}\right)dx=\int\left(\frac{5}{\sqrt{x^2+7}}-\frac{3}{x}-\frac{1}{x^4}+2x^{5/6}\right)dx=$$

$$=\left\{\begin{array}{l}\text{используем свойства 3 и 4 и разобьем интеграл от суммы}\\ \text{функции на сумму интегралов, при этом постоянные}\\ \text{множители вынесем за знак интегралов}\end{array}\right\}=$$

$$=5\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+7}}-3\int\frac{dx}{x}-\int x^{-4}dx+2\int x^{5/6}dx=\left\{\begin{array}{l}\text{используем табличные}\\ \text{интегралы 12, 4, 3}\end{array}\right\}=$$

$$=5\ln\left|x+\sqrt{x^2+7}\right|-3\ln|x|-\frac{x^{-4+1}}{-4+1}+2\cdot\frac{x^{5/6+1}}{5/6+1}+C=$$

$$=5\ln\left|x+\sqrt{x^2+7}\right|-3\ln|x|+\frac{1}{3x^3}+\frac{12}{11}x^{11/6}+C.$$

Проверка:

$$\left(5\ln\left|x+\sqrt{x^2+7}\right|-3\ln|x|+\frac{1}{3x^3}+\frac{12}{11}x^{11/6}+C\right)'=5\left(\ln\left|x+\sqrt{x^2+7}\right|\right)'-$$

$$-3\left(\ln|x|\right)'+\frac{1}{3}\left(x^{-3}\right)'+\frac{12}{11}\left(x^{11/6}\right)'+C'=$$

$$=5\cdot\frac{\left(x+\sqrt{x^2+7}\right)'}{x+\sqrt{x^2+7}}-3\cdot\frac{1}{x}+\frac{1}{3}(-3)x^{-3-1}+\frac{12}{11}\cdot\frac{11}{6}\cdot x^{11/6-1}=5\cdot\frac{1+\dfrac{\left(x^2+7\right)'}{2\sqrt{x^2+7}}}{x+\sqrt{x^2+7}}-$$

$$-\frac{3}{x}-\frac{1}{x^4}+2x^{5/6}=5\frac{1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+7}}}{x+\sqrt{x^2+7}}-\frac{3x^3+1}{x^4}+2\sqrt[6]{x^5}=5\frac{\sqrt{x^2+7}+x}{\left(x+\sqrt{x^2+7}\right)\sqrt{x^2+7}}-$$

$$-\frac{3x^3+1}{x^4}+2\sqrt[6]{x^5}=\frac{5}{\sqrt{x^2+7}}-\frac{3x^3+1}{x^4}+2\sqrt[6]{x^5}\text{ — âåðí î .}$$

$$\acute{a})\int\left(\frac{5}{11x^2+2}+3\cdot5^x+\frac{16-x^2}{4+x}\right)dx=5\int\frac{dx}{11\left(x^2+\dfrac{2}{11}\right)}+3\int5^xdx+$$

$$+\int\frac{(4-x)(4+x)}{4+x}dx=\frac{5}{11}\int\frac{dx}{x^2+\left(\sqrt{\dfrac{2}{11}}\right)^2}+3\int5^xdx+4\int dx-\int x\,dx=$$

$$=\left\{\begin{array}{l}\text{èñï î ëüçóåì ôî ðì óëû}\\ \text{13, 5, 2, 3 òàáëèöû èí òåãðàëî â}\end{array}\right\}=\frac{5}{11}\cdot\frac{1}{\sqrt{\dfrac{2}{11}}}\text{arctg}\frac{x}{\sqrt{\dfrac{2}{11}}}+3\cdot\frac{5^x}{\ln5}+$$

$$+4\tilde{o}-\frac{\tilde{o}^{1+1}}{1+1}+\tilde{N}=\frac{5}{\sqrt{22}}arctg\sqrt{\frac{11}{2}}+3\frac{5^x}{\ln5}+4x-\frac{x^2}{2}+C.$$

Проверка:

$$\left(\frac{5}{\sqrt{22}}\text{arctg}\sqrt{\frac{11}{2}}x+3\frac{5^x}{\ln5}+4x-\frac{1}{2}x^2+C\right)'=\frac{5}{\sqrt{22}}\left(\text{arctg}\sqrt{\frac{11}{2}}x\right)'+$$

$$+\frac{3}{\ln5}\left(5^x\right)'+4x'-\frac{1}{2}\left(x^2\right)'+C'=$$

$$=\frac{5}{\sqrt{22}}\frac{\left(\sqrt{\frac{11}{2}}x\right)'}{1+\frac{11}{2}x^2}+\frac{3}{\ln 5}\cdot 5^x\ln 5+4\cdot 1-\frac{1}{2}2x^{2-1}=\frac{5}{\sqrt{22}}\cdot\frac{\sqrt{\frac{11}{2}}}{\frac{2+11x^2}{2}}+$$

$$+3\cdot 5^x+4-x=\frac{5}{\sqrt{11}\cdot\sqrt{2}}\frac{\sqrt{11}\cdot 2}{\sqrt{2}\left(2+11x^2\right)}+3\cdot 5^x+\frac{(4-x)(4+x)}{4+x}=$$

$$=\frac{5}{2+11x^2}+3\cdot 5^x+\frac{16-x^2}{4+x}$$ — верно.

Метод замены переменной

Теорема 1. Пусть $x=\varphi(t)$ монотонная, непрерывно дифференцируемая функция, тогда

$$\int f(x)dx=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt. \qquad (1)$$

При этом, если $\int f(\varphi(t)\varphi'(t))\,dt=F(t)+C$, то $\int f(x)dx=F(\psi(x))+C$, где $\psi(x)$ — функция, обратная $\varphi(t)$.

Формула (1) называется *формулой замены переменной* в неопределенном интеграле.

Алгоритм замены переменной:

1) Связать старую переменную интегрирования x с новой переменной t с помощью замены $x=\varphi(t)$.

2) Найти связь между дифференциалами $dx=\varphi'(t)dt$.

3) Перейти под знаком интеграла к новой переменной.

4) Проинтегрировать и в полученной первообразной вернуться к старой переменной, подставив $t=\psi(x)$.

Пример 2. Проинтегрировать подходящей заменой переменной.

а) $\int\cos 4x dx$; *б)* $\int e^{9x+1}dx$; *в)* $\int x(2-x^2)^5dx$

Решение:

$$а)\ \int\cos 4xdx=\left|\begin{matrix}t=4x\\ dt=(4x)'=4dx\\ dx=\frac{dt}{4}\end{matrix}\right|=\int\cos t\frac{dt}{4}=\frac{1}{4}\int\cos tdt=\left\{\begin{matrix}\text{формула 7}\\ \text{таблицы}\\ \text{интегралов}\end{matrix}\right\}=$$

$$=\frac{1}{4}\sin t+C=\frac{1}{4}\sin 4x+C.$$

$$б)\ \int e^{9x+1}dx=\left|\begin{matrix}t=9x+1\\ dt=(9x+1)'=9dx\\ dx=\frac{dt}{9}\end{matrix}\right|=\int e^t\frac{dt}{9}=\frac{1}{9}\int e^tdt=\left\{\begin{matrix}\text{формула 6}\\ \text{таблицы}\\ \text{интегралов}\end{matrix}\right\}=$$

$$=\frac{1}{9}e^t+C=\frac{1}{9}e^{9x+1}+C.$$

$$в)\int x(2-x^2)^5\,dx = \left|\begin{matrix} t=2-x^2 \\ dt=(2-x^2)'=-2xdx \\ xdx=\dfrac{dt}{-2}\end{matrix}\right| = \int t^5\left(-\frac{dt}{2}\right) = -\frac{1}{2}\int t^5dt = \left\{\begin{matrix}\text{формула 3}\\ \text{таблицы}\\ \text{интегралов}\end{matrix}\right\} =$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{t^6}{6} + C = -\frac{1}{12}(2-x^2)^6 + C.$$

Интегрирование по частям.
Некоторые виды интегралов, вычисляемых по частям

Если производные функций $U = U(x)$ и $V = V(x)$ непрерывны, то справедлива формула:

$$\int UdV = UV - \int VdU, \qquad (3)$$

называемая *формулой интегрирования по частям.*

В качестве *U(x)* обычно выбирают функцию, которая упрощается при дифференцировании.

Некоторые стандартные случаи функций, интегрируемых по частям, указаны в таблице 1. Там же дается способ выбора множителей *U* и *dV*.

Таблица 1

Вид интеграла	$U \to dU$	$dV \to V$
$\int P_n(x)\sin kx\,dx$ $\int P_n(x)\cos kx\,dx$ $\int P_n(x)e^{kx}\,dx$ $n=1,2,\ldots$	$U = P_n(x) \to$ $\to dU = P_n'(x)dx$	$dV = \sin kx\,dx \to V = -\frac{1}{k}\cos kx$ $dV = \cos kx\,dx \to V = \frac{1}{k}\sin kx$ $dV = e^{kx}dx \to V = \frac{1}{k}e^{kx}$
$\int \ln kx\,P_n(x)dx$	$U = \ln kx \to dU = \frac{dx}{x}$	$dV = P_n(x)dx \to$ $\to V = \int P_n(x)dx$
$\int \arcsin kx\,P_n(x)dx$	$U = \arcsin kx \to dU = \frac{kdx}{\sqrt{1-k^2x^2}}$	
$\int \arccos kx\,P_n(x)dx$	$U = \arccos kx \to dU = -\frac{kdx}{\sqrt{1-k^2x^2}}$	
$\int \operatorname{arctg} kx\,P_n(x)dx$	$U = \operatorname{arctg} kx \to dU = \frac{kdx}{1+k^2x^2}$	

$\int \operatorname{arcctg} kx\, P_n(x)dx$	$U = \operatorname{arcctg} kx \to dU = -\frac{kdx}{1+k^2x^2}$	
$n = 0,1,2,...$		

$P_n(x)$ — многочлен от x степени n, т. е. $P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_n$, где $a_0 \neq 0$.

Пример 3. Проинтегрировать по частям.

а) $\int (3x-1)\sin 2x dx;$ *б)* $\int (1+2x)\ln x dx.$

Решение.

$$а)\ \int (3x-1)\sin 2xdx = \left| \begin{array}{l} U = 3x-1 \to dU = 3dx \\ dV = \sin 2xdx \to V = -\frac{\cos 2x}{2} \end{array} \right| = (3x-1)\left(-\frac{\cos 2x}{2}\right) + \int \frac{\cos 2x}{2}dx =$$

$$= -\frac{1}{2}(3x-1)\cos 2x + \frac{3}{2}\int \cos 2xdx = -\frac{1}{2}(3x-1)\cos 2x + \frac{3}{4}\sin 2x + C.$$

$$б)\ \int (1+2x)\ln xdx = \left| \begin{array}{l} U = \ln x \to dU = \frac{dx}{x} \\ dV = (1+2x)dx \to \\ V = \int (1+2x)dx = x + x^2 \end{array} \right| = \ln x(x+x^2) - \int (x+x^2)\frac{dx}{x} =$$

$$= \ln x(x+x^2) - \int (1+x)dx = \ln x(x+x^2) - x - \frac{x^2}{2} + C.$$

Содержание практической работы

№1. Применяя метод непосредственного интегрирования, вычислить интегралы (4 балла):

1. $\int \left(\frac{2}{1+x^2} - \frac{3}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx$
2. $\int \left(\frac{2}{1+x^2} - \frac{3}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx$
3. $\int (2^x + 3^x)dx$
4. $\int \frac{1-\sin^3 x}{\sin^2 x}dx$

№2. Пользуясь методом подстановки вычислить интегралы (4 балла):

1. $\int \cos 5x dx$
2. $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}+1}dx$
3. $\int \frac{dx}{\sin^2 \frac{x}{3}}$
4. $\int e^{\sin x}\cos x dx$

№3. С помощью метода интегрирования по частям вычислить интегралы (4 балла):

1. $\int \left(4x^3 + 6x - 7\right)\ln x dx$

2. $\int x \ln x dx$

3. $\int x e^{-x} dx$

4. $\int \arcsin x dx$

Критерии оценки	
Количество набранных баллов	Оценка
менее 5	2
5-6	3
7-9	4
10-12	5

Практическая работа №3

Тема: Решение прикладных задач (приложения производной и интеграла).

Цель: сформировать умение решать прикладные задачи, используя приложения производной и интеграла; сформировать умение применять определенный интеграл для вычисления площадей, длин и объемов фигур.

Практическая работа состоит из двух частей – теоретической и практической. После изучения теоретического материала можно приступать к выполнению практической части. Она состоит из одной или более задач для самостоятельного выполнения. Не забывайте о правильном оформлении решения.

Порядок выполнения работы

1. Рассмотрите теоретический материал по теме и примеры решения задач (приведены ниже).

2. Решите задачи для самостоятельного выполнения. Оформите решение письменно в тетради для практических работ.

Теоретические сведения к практической работе
Приложения к механике и физике

Величины	Вычисление производной	Вычисление интеграла
s – перемещение, ϑ – скорость, A – ускорение	$\vartheta(t) = s'(t)$ $a(t) = \vartheta'(t)$	$s = \int_{t_1}^{t_2} \upsilon(t)dt$ $\upsilon = \int_{t_1}^{t_2} a(t)dt$
A - работа, F – сила, N - мощность	F(x) = A'(x) N(t) = A'(t)	$A = \int_{x_1}^{x_2} F(x)dx$ $A = \int_{t_1}^{t_2} N(t)dt$
m – масса тонкого стержня, ρ - линейная плотность	ρ(x) = m'(x)	$m = \int_{x_1}^{x_2} \rho(x)dx$
q – электрический заряд, I –сила тока	I(t) = q′(t)	$q = \int_{t_1}^{t_2} J(t)dt$
Q – количество теплоты c - теплоемкость	c(t) = Q'(t)	$Q = \int_{t_1}^{t_2} c(t)dt$

Приложения производной к механике и физике

Пример. Точка движется прямолинейно по закону $S(t) = 2t^3 + t^2 - 4$, где S выражен в метрах (м), время t – в секундах (с). Найти значения скорости и ускорения в момент времени t = 4.

Решение. Найдем скорость движения точки в любой момент времени t: $V(t) = 6t^2 + 2t$. Вычислим скорость движения точки в момент времени t = 4: $V(t) = 6 \cdot 4^2 + 2 \cdot 4 = 104$ (м/с).

Найдем ускорение движения точки в любой момент времени t: a(t) = 12t + 2. Вычислим ускорение движения точки в момент времени t = 4: $a(t) = 12 \cdot 4 + 2 = 50$ (м/с^2).

Пример. Сила тока I изменяется в зависимости от времени t по закону $I = 0{,}4t^2$ (I – измеряется в амперах, t – в секундах). Найти скорость изменения силы тока в конце 8-й секунды.

Решение. Скорость изменения силы тока есть производная силы тока по времени: $I'(t) = 0{,}8t$. Найдем скорость изменения силы тока в конце 8-й секунды: $I'(t) = 0{,}8 \cdot 8 = 6{,}4$ (A/c).

Приложения интеграла к вычислению площадей, длин и объемов.

Площади плоских фигур

1. Вычисление площадей плоских фигур в декартовой системе координат

Если плоская фигура (рис. 1) ограничена линиями $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, где $f_2(x) \geq f_1(x)$ для всех $x \in [a,b]$, и прямыми $x = a$, $x = b$, то ее площадь вычисляется по формуле:

$$S = \int_a^b \left(f_2(x) - f_1(x) \right) dx. \qquad (1)$$

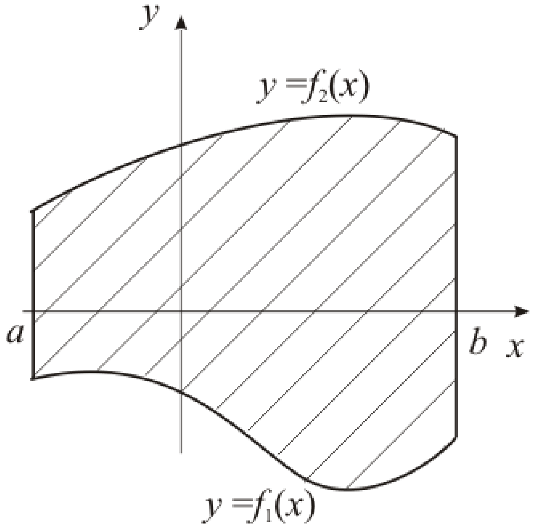


Рис. 1

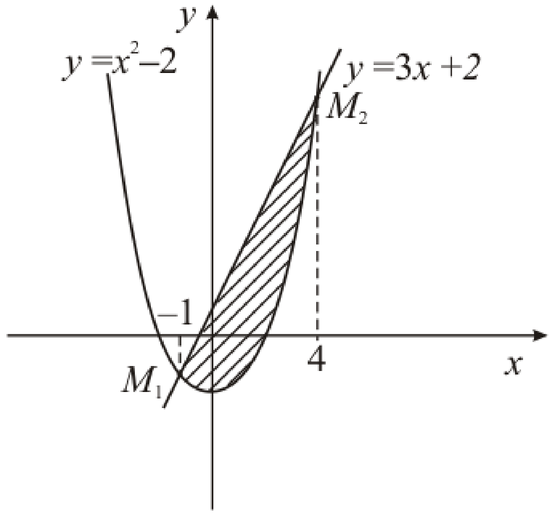


Рис. 2

Пример. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями: y = $x^2 - 2$, y = 3x + 2.

Решение. Построим схематический рисунок (рис. 2). Для построения параболы возьмем несколько точек:

x	0	1	–1	2	–2	3	–3	4	–4
y	–2	–1	–1	2	2	7	7	14	14

Для построения прямой достаточно двух точек, например (0, 2) и (-1, -1). Найдем координаты точек M_1 и M_2 пересечения параболы y = x^2 - 2 и прямой y = 3x + 2.

Для этого решим систему уравнений:

$$\begin{cases} y = x^2 - 2, \\ y = 3x + 2. \end{cases} \Rightarrow x^2 - 2 = 3x + 2, \quad x^2 - 3x - 4 = 0, \quad x_1 = -1, \quad x_2 = 4.$$

Тогда $y_1 = 3 \cdot (-1) + 2 = -1, \quad y_2 = 3 \cdot 4 + 2 = 14.$ Итак, $M_1(-1,-1), \quad M_2(4,14).$

Площадь полученной фигуры найдем по формуле (1), в которой

$f_2(x) = 3x + 2, \; f_1(x) = x^2 - 2,$ поскольку $f_2(x) \geq f_1(x)$ для всех $x \in [-1, 4]$.

Получим:

$$S = \int_{-1}^{4} \left(3x + 2 - \left(x^2 - 2 \right) \right) dx = \int_{-1}^{4} \left(3x - x^2 + 4 \right) dx = \left(\frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + 4x \right) \Bigg|_{-1}^{4} =$$

$$= \frac{3 \cdot 4^2}{2} - \frac{4^3}{3} + 4 \cdot 4 - \left(\frac{3 \cdot (-1)^2}{2} - \frac{(-1)^3}{3} + 4 \cdot (-1) \right) = 24 - \frac{64}{3} + 16 - \frac{3}{2} - \frac{1}{3} + 4 =$$

$$= 44 - \frac{65}{3} - \frac{3}{2} = \frac{125}{6} = 20\frac{5}{6} \; (\text{кв.ед.})$$

2. Вычисление площадей фигур, ограниченных линиями, заданными параметрически

Если функции $y = y(t)$ и $x = x(t)$ имеют непрерывные производные первого порядка для всех $t \in [t_0, t_1]$, то площадь плоской фигуры, ограниченной линией $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$ $t \in [t_0, t_1]$, прямыми $x = a$, $x = b$, где $a = x(t_0)$, $b = x(t_1)$, и осью OX, вычисляется по формуле:

$$S = \left| \int_{t_0}^{t_1} y(t) x'(t)\, dt \right|. \qquad (2)$$

Пример. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными параметрически: $x = 2\cos t,\ y = 3\sin t,\ 0 \le t \le 2\pi.$

Решение. Для построения фигуры составим таблицу значений координат (x, y) точек кривой, соответствующих различным значениям параметра $t,\ 0 \le t \le 2\pi.$

Нанесем точки (x, y) на координатную плоскость XOY и соединим плавной линией. Когда параметр t изменяется от 0 до 2π, соответствующая точка (x, y) описывает эллипс (известно, что $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$, $0 \le t \le 2\pi$ — параметрические формулы, задающие эллипс с полуосями a и b). Учитывая симметрию фигуры относительно координатных осей OX и OY, найдем её площадь S, умножив на 4 площадь криволинейной трапеции AOB. Согласно формуле (2) получим:

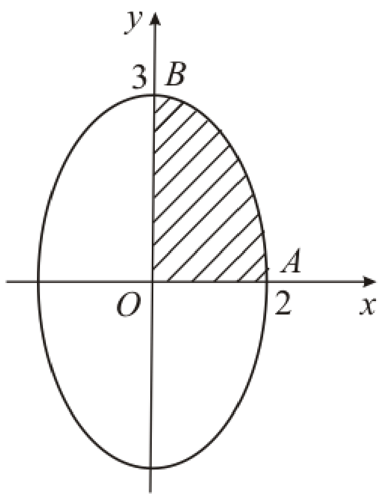


Рис. 3

t	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
x	2	0	–2	0	2
y	0	3	0	–3	0

$$S=4\left|\int_0^{\frac{\pi}{2}}3\sin t\left(2\cos t\right)'\,dt\right|=4\left|-6\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\,dt\right|=\begin{Bmatrix}\text{используем формулу}\\ \text{понижения степени}\\ \text{для } \sin^2\alpha \text{ из таблицы 2}\end{Bmatrix}=$$

$$=4\left|-6\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}\left(1-\cos 2t\right)dt\right|=4\left|-3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\cos 2t\right)dt\right|=4\left|-3\left(t-\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right|=$$

$$=4\left|-3\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\sin\pi-\left(0-\frac{1}{2}\sin 0\right)\right)\right|=4\left|-3\frac{\pi}{2}\right|=6\pi\approx 18{,}850\ (\text{кв. ед.}).$$

Длина дуги плоской кривой

1. Вычисление дуги плоской кривой в декартовых координатах

Если кривая задана уравнением $y=f(x)$, функция $f(x)$ имеет непрерывную первую производную при всех $x\in[a,b]$, то длина дуги AB (рис. 4) этой кривой, заключенной между точками $A\left(a,f(a)\right)$ и $B\left(b,f(b)\right)$, вычисляется по формуле:

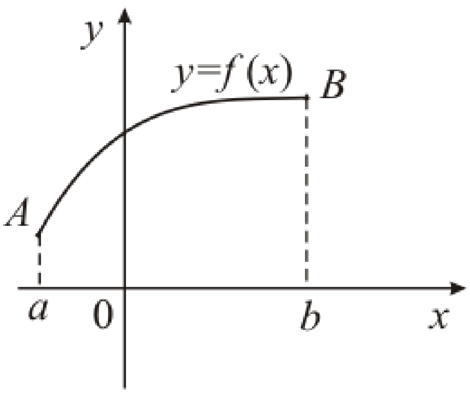


Рис. 4

$$l_{\grave{A}\hat{A}}=\int_a^b\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx. \qquad (3)$$

2. Вычисление длины дуги кривой, заданной параметрически

Если кривая задана параметрически $\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\end{cases}$, $t_0\le t\le t_1$, и функции $x(t)$, $y(t)$ имеют непрерывные производные 1-го порядка при всех $t\in[t_0,t_1]$, то длина дуги *AB*, соответствующей изменению параметра от t_0 до t_1, вычисляется по формуле:

$$l_{\grave{A}\hat{A}}=\int_{t_0}^{t_1}\sqrt{\left(x'(t)\right)^2+\left(y'(t)\right)^2}\,dt. \qquad (4)$$

Пример. Найти длину дуги кривой

а) $y=x^{3/2},\ 0\le x\le 1;$ б) $x=2\cos t-\cos 2t,\ y=2\sin t-\sin 2t,\ 0\le t\le 2\pi.$

Решение.

а) Так как кривая задана в декартовой системе координат уравнением $y=f(x)$, то для вычисления длины дуги воспользуемся формулой (3). Найдем y': $y'=\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$ и подставим в (3):

$$l_{\grave{A}\hat{A}}=\int_0^1\sqrt{1+\left(\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\right)^2}dx=\int_0^1\sqrt{1+\frac{9x}{4}}dx=\left|\begin{array}{l} t=1+\dfrac{9x}{4}, dt=\dfrac{9}{4}dx, dx=\dfrac{4}{9}dt, \\ x=0\to t=1, \\ x=1\to t=1+\dfrac{9}{4}=\dfrac{13}{4}. \end{array}\right|=$$

$$=\frac{4}{9}\int_1^{13/4}t^{\frac{1}{2}}dt=\left\{\begin{array}{l}\text{ôîðìóëà 3}\\ \text{òàáëèöû}\\ \text{èíòåãðàëîâ}\end{array}\right\}=\frac{4}{9}\left.\frac{t^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right|_1^{13/4}=\frac{8}{27}t^{\frac{3}{2}}\Big|_1^{13/4}=\frac{8}{27}\left(\left(\frac{13}{4}\right)^{\frac{3}{2}}-1\right)=$$

$$=\frac{8}{27}\left(\frac{13\sqrt{13}}{8}-1\right)\approx 1{,}440\ (\text{åäèíèö äëèíû}).$$

б) $x=2\cos t-\cos 2t,\ y=2\sin t-\sin 2t,\ 0\le t\le 2\pi.$

Кривая задана параметрически, поэтому воспользуемся формулой (4). Найдем $x'(t),\ y'(t)$:

$x'(t)=-2\sin t+2\sin 2t,\ y'(t)=2\cos t-2\cos 2t$ и подставим в (4):

$$l_{\grave{A}\hat{A}}=\int_0^{2\pi}\sqrt{(-2\sin t+2\sin 2t)^2+(2\cos t-2\cos 2t)^2}dt=$$

$$=\int_0^{2\pi}\sqrt{4\sin^2 t-8\sin t\sin 2t+4\sin^2 2t+4\cos^2 t-8\cos t\cos 2t+4\cos^2 2t}\,dt=$$

$$=\int_0^{2\pi}\sqrt{4\left(\sin^2 t+\cos^2 t\right)+4\left(\sin^2 2t+\cos^2 2t\right)-8\left(\cos t\cos 2t+\sin t\sin 2t\right)}\,dt=$$

$$=\left\{\begin{array}{l}\text{èñïîëüçóåì òðèãîíîìåòðè÷åñêèå ôîðìóëû}\\ \sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1 \text{ è } \cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\end{array}\right\}=\int_0^{2\pi}\sqrt{8-8\cos t}dt=$$

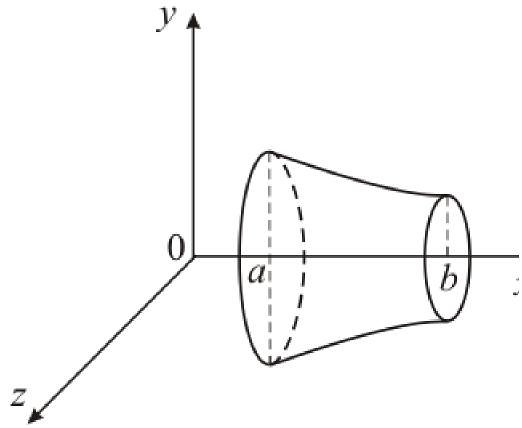
$$=\sqrt{8}\int_0^{2\pi}\sqrt{1-\cos t}\,dt=\left\{\begin{array}{l}\text{èñïîëüçóåì ôîðìóëó}\\ \sin^2\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1}{2}(1-\cos\alpha)\Rightarrow\\ \Rightarrow 1-\cos\alpha=2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}\end{array}\right\}=2\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\sqrt{2\sin^2\frac{t}{2}}dt=$$

$$=4\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}dt=-8\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi}=-8(\cos\pi-\cos 0)==-8(-1-1)=16(\text{åäèíèö äëèíû}).$$

Вычисление объемов тел вращения

Если тело образовано вращением вокруг оси *OX* криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y=f(x)$, осью *OX* и прямыми $x=a$, $x=b$ (рис. 5), то его объем вычисляется по формуле:

$$V=\pi\int_a^b\left(f(x)\right)^2dx. \qquad (5)$$



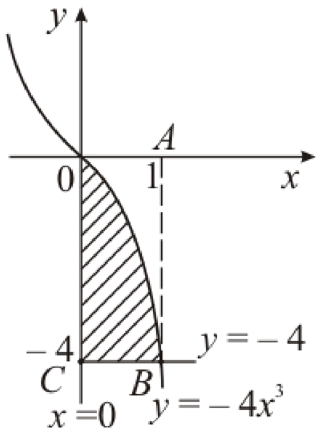


Рис. 5 Рис. 6

Пример. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси *OX* фигуры, ограниченной линиями: $y = -4x^3$, $x = 0$, $y = -4$.

Решение. Построим криволинейную трапецию, вращением которой получается тело вращения (рис. 6).

Чтобы получить объем тела вращения из объема V_1 тела, полученного вращением фигуры *OABC*, вычтем объем V_2 тела, полученного вращением фигуры *OAB*. Тогда искомый объем $V = V_1 - V_2$. По формуле (5) найдем V_1 и V_2:

$V_1 = \pi\int_0^1 (-4)^2\, dx = \pi 16x\big|_0^1 = 16\pi$ (ед. объема);

$V_2 = \pi\int_0^1 \left(-4x^3\right)^2 dx = 16\pi\int_0^1 x^6 dx = 16\pi\dfrac{x^7}{7} = \dfrac{16\pi}{7}$ (ед. объема);

$V = V_1 - V_2 = 16\pi - \dfrac{16\pi}{7} = \dfrac{96}{7}\pi \approx 43{,}085$ (ед. объема).

Вычисление пути, пройденного точкой

Путь, пройденный точкой при неравномерном движении по прямой с переменной скоростью $v = f(t) \geq 0$ за промежуток времени от t_1 до t_2, вычисляется по формуле

$$S = \int_{t_1}^{t_2} f(t)dt. \qquad (6)$$

Пример. Скорость движения точки изменяется по закону $v = \left(3t^2 + 2t + 1\right)$ м/с. Найти путь, пройденный точкой за 10 с от начала движения.

Решение. Согласно условию, $f(t) = 3t^2 + 2t + 1$, $t_1 = 0$, $t_2 = 10$. По формуле (6) находим

$S = \int_0^{10} (3t^2 + 2t + 1)dt = \left[t^3 + t^2 + t\right]_0^{10} = 10^3 + 10^2 + 10 = 1110$ (м).

Вычисление работы силы

Работа, произведенная переменной силой $f(x)$ при перемещении по оси O_x материальной точки от $x = a$ до $x = b$, находится по формуле

$$A = \int_a^b f(x)dx. \qquad (7)$$

При решении задач на вычисление работы силы часто используется закон Гука:

$$F = kx, \qquad (8)$$

где F - сила, Н; x - абсолютное удлинение пружины, м, вызванное силой F, а k - коэффициент пропорциональности, Н/м.

Пример. Сжатие x винтовой пружины пропорционально приложенной силе F. Вычислить работу силы F при сжатии пружины на 0,04 м, если для сжатия ее на 0,01 м нужна сила 10 Н.

Решение. Так как, $x = 0{,}01$ м при $F = 10$ Н, то, подставляя эти значения в равенство (8), получим $10 = k \cdot 0{,}01$, откуда $k = 1000$ Н/м. Подставив теперь в это же равенство значение k, находим $F = 1000x$, т. е. $f(x) = 1000x$. Искомую работу найдем по формуле (7), полагая $a = 0$, $b = 0{,}04$:

$$A = \int_0^{0,04} 1000x\,dx = 500x^2 \Big|_0^{0,04} = 0{,}8 \text{ (Дж)}.$$

Вычисление работы, производимой при поднятии груза

Пример. Цилиндрическая цистерна с радиусом основания 0,5 м и высотой 2 м заполнена водой. Вычислить работу, которую необходимо произвести, чтобы выкачать воду из цистерны.

Решение. Выделим на глубине *x* горизонтальный слой высотой *dx* (рис. 7).

Работа *A*, которую надо произвести, чтобы поднять слой воды весом *P* на высоту *x*, равна P_x.

Изменение глубины *x* на малую величину *dx* вызовет изменение объема *V* на величину $dV = \pi r^2 dx$ и изменение веса *P* на величину $dP = 9807\pi r^2 dx$; при этом совершаемая работа *A* изменится на величину $dA = 9807\pi r^2 x dx.$

Проинтегрировав это равенство при изменении *x* от 0 до *H*, получим

$$A = \int_0^H 9807\pi r^2 x dx = 4903\pi r^2 H^2 = 4903\pi \cdot 0{,}25 \cdot 2^2 = 4903\pi \text{ (Дж)}.$$

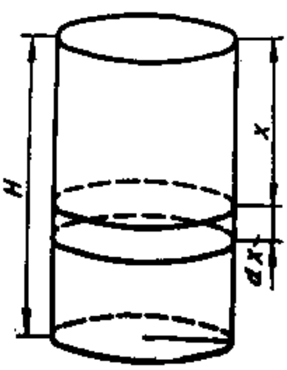


Рис.7

Вычисление силы давления жидкости

Значение силы *P* давления жидкости на горизонтальную площадку зависит от глубины погружения *x* этой площадки, т. е. от расстояния площадки до поверхности жидкости.

Сила давления (Н) на горизонтальную площадку вычисляется по формуле

$$P = 9807\delta Sx,$$

где δ - плотность жидкости, $кг/м^3$; S площадь площадки, $м^2$; x - глубина погружения площадки, м.

Если площадка, испытывающая давление жидкости, не горизонтальна, то давление на нее различно на разных глубинах, следовательно, сила давления на площадку есть функция глубины ее погружения *P(x)*.

Пример. Вычислить силу давления воды на вертикальный прямоугольный шлюз с основанием 20 м и высотой 5 м (уровень воды совпадает с верхним обрезом шлюза).

Решение. На глубине *x* выделим горизонтальную полоску шириной *dx* (рис 8). Сила давления *P* на стенку шлюза есть функция от *x*. Изменение глубины *x* на малую величину *dx* вызовет изменение силы давления *P* на малую величину ΔP.

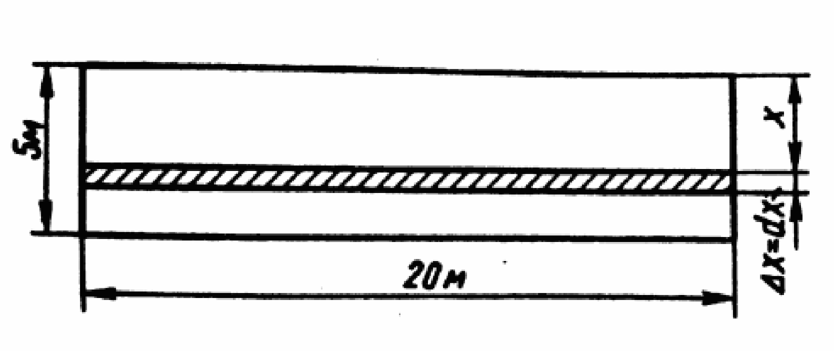


Рис.8

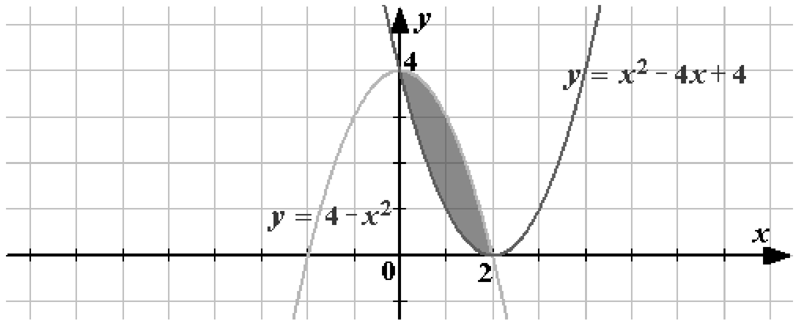
Продифференцировав переменную *P,* получим приближенное значение (главную часть) dP приращения ΔP.

Находим приближенное значение силы давления воды на эту полоску: $\Delta P = 9{,}807\delta x\Delta S = 9807x \cdot 20\Delta x$. Но $dP \approx \Delta P$. Интегрируя dP при изменении *x* от 0 до 5, получим

$$P = 9807 \cdot 20\int_0^5 x dx = 9807 \cdot 10x^2 \mid_0^5 = 2{,}45 \text{ (МН)}.$$

Содержание практической работы

1. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной функциями: x-2y+4=0, x+y-5 = 0, y = 0 (1 балл).
2. При сжатии пружины на 0,05 м затрачивается работа 25 Дж. Какую работу необходимо совершить, чтобы сжать пружину на 0,1 м? (1 балл)
3. Цилиндрическая цистерна с радиусом основания 0,5 м и высотой 2 м заполнена водой. Вычислить работу, которую необходимо произвести, чтобы выкачать воду из цистерны (1 балл).
4. Вычислить силу давления воды на вертикальный прямоугольный шлюз с основанием 20м и высотой 5м (уровень воды совпадает с верхним обрезом шлюза) (1 балл).
5. Точка движется прямолинейно по закону $S(t) = 6t - t^2$. В какой момент времени скорость точки окажется равной нулю (1 балл).
6. Тело массой 10 кг движется прямолинейно по закону $S(t) = 3t^2 + t + 4$. Найти кинетическую энергию тела ($mV^2/2$) через 4 секунды после начала движения (1 балл).
7. Вычислите площадь заштрихованной фигуры (1 балл).



8. Найти длину дуги параболы $y^2 = x$ между точками O (0;0) и A($\frac{3}{4}$; $\frac{\sqrt{3}}{2}$) (2 балла).

9. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной параболами $y = x^2$, $y^2 = 8x$ (2 балла).

Критерии оценки	
Количество набранных баллов	Оценка
менее 5	2
5-6	3
7-8	4
9-11	5

Практическая работа №4

Тема: Выполнение действий над комплексными числами, заданными в алгебраической форме.

Цель: сформировать умение выполнять арифметические действия с комплексными числами, заданными в алгебраической форме.

Практическая работа состоит из двух частей – теоретической и практической. После изучения теоретического материала можно приступать к выполнению практической части. Она состоит из одной или более задач для самостоятельного выполнения. Не забывайте о правильном оформлении решения.

Порядок выполнения работы

1. Рассмотрите теоретический материал по теме и примеры решения задач (приведены ниже).
2. Решите задачи для самостоятельного выполнения. Оформите решение письменно в тетради для практических работ.

Теоретические сведения к практической работе

Комплексное число – это выражение вида

$$z = x + iy, \tag{1.1}$$

где *x, y* – вещественные числа, а $i = \sqrt{-1}$ – *мнимая единица*. Первое из вещественных чисел, *x*, называется *вещественной (действительной) частью* комплексного числа (используется обозначение $x = \operatorname{Re} z$); второе, *y*, - *мнимой частью* ($y = \operatorname{Im} z$). Выражение (1.1) называют *алгебраической формой записи комплексного числа*.

Числом, *сопряженным* к $z = x + iy$, называют число вида $\bar{z} = x - iy$. Используя формулу разности квадратов, получаем, что $z\bar{z} = x^2 + y^2$. Можно доказать, что корнями квадратного уравнения с отрицательным дискриминантом являются два сопряженных комплексных числа.

Пример 1. Решить уравнение $x^2 - 6x + 18 = 0$.

Решение. Дискриминант данного уравнения: $D = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 18 = 36 - 72 = -36$ меньше нуля, но теперь мы можем воспользоваться мнимой единицей:

$x_{1,2} = \dfrac{6 \pm \sqrt{-36}}{2} = \dfrac{6 \pm \sqrt{36} \cdot \sqrt{-1}}{2} = \dfrac{6 \pm 6\,i}{2}$, т.е. $x_1 = 3 + 3i$; $x_2 = 3 - 3i$.

Справедливы следующие *правила арифметических действий над комплексными числами* $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$:

1) $z_1 \pm z_2 = (x_1 + iy_1) \pm (x_2 + iy_2) = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)$ (осуществляется сложение или вычитание алгебраических двучленов и приведение подобных);

2) $z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = (x_1 x_2 - y_1 \cdot y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$ осуществляется перемножение алгебраических двучленов и приведение подобных с учетом того, что $i^2 = -1$);

3) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{z_1 \overline{z_2}}{z_2 \overline{z_2}} = \dfrac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \dfrac{(x_1 x_2 + y_1 y_2) + i(x_2 y_1 - x_1 y_2)}{x_2^2 + y_2^2}$

(эта операция возможна только в случае, когда $z_2 \neq 0 + i0 = 0$).

Пример 2. Вычислить $z = \dfrac{2 - 7i}{3 + 4i}$ и указать вещественную и мнимую части полученного комплексного числа.

Решение. Действуя в соответствии с правилами получаем:

$$z = \frac{2 - 7i}{3 + 4i} = \frac{(2 - 7i)(3 - 4i)}{(3 + 4i)(3 - 4i)} = \frac{6 - 8i - 21i + 28i^2}{9 - 16i^2} = \frac{6 - 29i - 28}{9 + 16} = \frac{-22 - 29i}{25} = -\frac{22}{25} - \frac{29}{25}i;$$

поэтому $\operatorname{Re} z = -\dfrac{22}{25}$, $\operatorname{Im} z = -\dfrac{29}{25}$.

Содержание практической работы

Задание 1. Вычислить, выписать вещественную и мнимую части полученных комплексных чисел (6 баллов).

1) $(2 - 3i) - (1 + i)(2i - 1)$ 2) $\dfrac{2 + 3i}{1 - i}$ 3) $6i + \dfrac{1 + 7i}{2 - 3i}$

4) $(3 + i)\dfrac{1 + i}{1 - i}$ 5) $\dfrac{(1 - i\sqrt{3})^2}{i - \sqrt{3}}$ 6) $(1 + 2i)^3 - 3$ 7) $(1 - i)^2 + i^4$

Задание 2. Найти все корни уравнений (7 баллов):

1) $x^2 + 9 = 0$; 2) $x^2 - 3x + 10 = 0$; 4) $x^2 - 2x + 10 = 0$;

5) $x^2 + 2x + 10 = 0$; 6) $x^4 - 16 = 0$ 7) $x^2 + 100 = 0$.

Критерии оценки	
Количество набранных баллов	Оценка
менее 5	2
5-6	3
7-9	4
10-12	5

Практическая работа №5

Тема: Выполнение действий над комплексными числами, заданными в тригонометрической форме.

Цель: сформировать умение выполнять арифметические действия с комплексными числами, заданными в тригонометрической форме.

Практическая работа состоит из двух частей – теоретической и практической. После изучения теоретического материала можно приступать к выполнению практической части. Она состоит из одной или более задач для самостоятельного выполнения. Не забывайте о правильном оформлении решения.

Порядок выполнения работы

1. Рассмотрите теоретический материал по теме и примеры решения задач (приведены ниже).

2. Решите задачи для самостоятельного выполнения. Оформите решение письменно в тетради для практических работ.

Теоретические сведения к практической работе

Комплексное число – это выражение вида

$$z = x + iy, \qquad (1.1)$$

где *x, y* – вещественные числа, а $i = \sqrt{-1}$ – *мнимая единица*. Первое из вещественных чисел, *x*, называется *вещественной (действительной) частью* комплексного числа (используется обозначение $x = \operatorname{Re} z$); второе, *y*, - *мнимой частью* ($y = \operatorname{Im} z$).

Тригонометрическая форма комплексного числа. Каждому комплексному числу вида (1.1) можно поставить в соответствие точку *M(x;y)* на декартовой плоскости (при этом на оси *OX* располагаются вещественные числа $z = x + i0 = x$, а на оси *OY* – чисто мнимые числа $z = 0 + iy = iy$).

Модулем комплексного числа назовем длину отрезка $|OM|$ (или расстояние от начала координат до точки *M*), т.е. $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Аргументом комплексного числа ($\varphi = \operatorname{Arg} z$) назовем угол, который вектор $\overline{OM}$ образует с положительным направлением оси OX. Главное значение аргумента, которое, как правило, используется при осуществлении действий с комплексными числами, удовлетворяет условию $0 \le \varphi < 2\pi$.

При этом выражение вида

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi) \qquad (1.2)$$

называется *тригонометрической формой записи комплексного числа*.

Преобразуем (1.1)

$$z = x + iy = \sqrt{x^2 + y^2}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + i\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) = |z|\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + i\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)$$

и, сравнивая с (1.2), получаем, что аргумент z можно найти, решив систему

$$\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \sin\varphi = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{x}{|z|} \\ \sin\varphi = \dfrac{y}{|z|} \end{cases} \qquad (1.3.)$$

Пример 3. Записать комплексное число в тригонометрической форме $z = 1 - i\sqrt{3}$, указать модуль и аргумент комплексного числа.

Решение. По определению $|z| = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$. Для определения аргумента воспользуемся формулой: $\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{1}{2} \\ \sin\varphi = \dfrac{-\sqrt{3}}{2} \end{cases}$. Получаем, что $\varphi = \arg z = \dfrac{5\pi}{3}$.

Тригонометрическая форма заданного комплексного числа имеет вид: $z = 2\left(\cos\dfrac{5\pi}{3} + i\sin\dfrac{5\pi}{3}\right)$.

Возведение в степень и извлечение корней. Если комплексное число задано тригонометрической формой $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, то справедлива формула Муавра

$$z^n = |z|^n\left(\cos n\varphi + i\sin n\varphi\right). \qquad (1.4)$$

Для извлечения корня n-й степени (n – целое число, большее 1) из комплексного числа, заданного в тригонометрической форме, применяется формула, дающая n значений этого корня:

$$z_k = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right), \quad k=0,1,\ldots,n-1. \qquad (1.5)$$

Пример 4. Вычислить: a) $(-1 + i)^{13}$; b) $\sqrt[3]{-1}$.

Решение. В задании a), чтобы воспользоваться формулой Муавра, необходимо представить комплексное число в тригонометрической форме. Имеем: $|z| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$; $\cos\varphi = -1/\sqrt{2}$ и $\sin\varphi = 1/\sqrt{2}$, т.е. $\varphi = 3\pi/4$ (так как соответствующая точка лежит во второй четверти). Следовательно, $-1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{3\pi}{4} + i\sin\dfrac{3\pi}{4}\right)$ и $(-1+i)^{13} = \sqrt{2^{13}}\left(\cos\dfrac{3\cdot 13\pi}{4} + i\sin\dfrac{3\cdot 13\pi}{4}\right)$ (в силу (1.4)).

Учитывая что $\dfrac{39\pi}{4} = 10\pi - \dfrac{\pi}{4}$ и используя свойства тригонометрических функций, получаем:

$$(-1+i)^{13} = 64\sqrt{2}\left(\cos(-\frac{\pi}{4}) + i\sin(-\frac{\pi}{4})\right) = 64\sqrt{2}(\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}) = 64 - 64i.$$

В задании b) тригонометрическая форма заданного числа имеет вид $-1 = \cos\pi + i\sin\pi$ ($|z|=1$), поэтому в силу (1.5)

$$z_k = \sqrt[3]{1}\left(\cos\frac{\pi + 2k\pi}{3} + i\sin\frac{\pi + 2k\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi + 2k\pi}{3} + i\sin\frac{\pi + 2k\pi}{3},\ k=0,1,2.$$

Выписываем три искомых корня:

$$z_0 = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$z_1 = \cos\frac{\pi + 2\pi}{3} + i\sin\frac{\pi + 2\pi}{3} = \cos\pi + i\sin\pi = -1;$$

$$z_2 = \cos\frac{\pi + 4\pi}{3} + i\sin\frac{\pi + 4\pi}{3} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Содержание практической работы

Задание 1. Запишите предложенные комплексные числа в тригонометрической форме: 1) -3i; 2) 2 + i; 3) 3 + 3i; 4)2 – 5i; 5)7 + 8i; 6)10 – 5i; 7) 2 – 4i (7 баллов).

Задание 2. Возведите в степень по формулам Муавра а) $\left(-1+i\sqrt{3}\right)^9$; б) $\left(\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^6$ (2 балла).

Задание 3. Извлеките корень а) $\sqrt{2+2i\sqrt{3}}$; б) $\sqrt[3]{8}$ (2 балла).

Критерии оценки	
Количество набранных баллов	Оценка
менее 5	2
5-6	3
7-8	4
9-11	5

Практическая работа №6

Тема: Операции над матрицами. Вычисление ранга матрицы. Вычисление определителей.

Цель: сформировать умение выполнять арифметические действия с матрицами, находить ранги и определители матриц.

Практическая работа состоит из двух частей – теоретической и практической. После изучения теоретического материала можно приступать к выполнению практической части. Она состоит из одной или более задач для самостоятельного выполнения. Не забывайте о правильном оформлении решения.

Порядок выполнения работы

1. Рассмотрите теоретический материал по теме и примеры решения задач (приведены ниже).
2. Решите задачи для самостоятельного выполнения. Оформите решение письменно в тетради для практических работ.

Теоретические сведения к практической работе

Матрицей называется прямоугольная таблица чисел, состоящая из m строк и n столбцов, которую записывают в следующем виде:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Для обозначения матрицы используют прописные латинские буквы, для обозначения элементов матрицы – строчные латинские буквы с указанием номера строки и столбца, на пересечении которых стоит данный элемент. Запись « матрица B имеет размер mхn» означает, что речь идет о матрице, состоящей из m строк и n столбцов. Например, матрица $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ имеет размер 2х3. Далее, b_{ij} - обозначение элемента, стоящего на пересечении i-й строки и j-го столбца данной матрицы (в примере $b_{23}=5$).

При ссылке на i-*ю* строку матрицы A используют обозначение A_i, при ссылке на j-*й* столбец – обозначение A^j.

Матрица, у которой число строк совпадает с числом столбцов, называется *квадратной*. Элементы a_{11} , a_{22} ,…, a_{nn} квадратной матрицы A (размера nхn) образуют *главную диагональ*. Квадратная матрица, у которой отличные от нуля элементы могут стоять только на главной диагонали, называется *диагональной.* Диагональная матрица, у которой все элементы (главной диагонали!) равны 1, называется *единичной.* Наконец, квадратная матрица, у которой ниже (выше) главной диагонали находятся только нули, называется *верхней (нижней) треугольной матрицей*. Например, среди квадратных матриц размера 3х3

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

матрица A является верхней треугольной, B – диагональной, C – нижней треугольной, E – единичной.

Матрицы A, B называются *равными* (A=B), если они имеют одинаковый размер, и их элементы, стоящие на одинаковых позициях, совпадают.

Арифметические действия с матрицами.

Чтобы *умножить матрицу A на отличное от нуля вещественное число k,* необходимо каждый элемент матрицы умножить на это число:

$$kA = k\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \dots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \dots & ka_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \dots & ka_{mn} \end{pmatrix}.$$

Чтобы найти *сумму матриц A, B* одной размерности, необходимо сложить элементы с одинаковыми индексами (стоящие на одинаковых местах):

$$A+B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}= .$$

$$=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

Пример 1. Найти *2A-B*, если $A=\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$.

Решение. Сначала умножаем матрицу *A* на число «2», затем матрицу *B* на число «-1», и, наконец, находим сумму полученных матриц:

$$2A-B=2\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 & -2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$$

Произведение AB можно определить только для матриц *A* размера *m*x*n* и *B* размера *n*x*p*, при этом *AB*=*C*, матрица *C* имеет размер *m*x*p,* и ее элемент c_{ij} находится как скалярное произведение *i-й* строки матрицы *A* на *j-й* столбец матрицы *B:* $c_{ij}=A_iB^j=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\ldots+a_{in}b_{nj}$ *(i=1,2,…,m; j=1,2,…,p).* Фактически необходимо каждую строку матрицы *A* (стоящей слева) умножить скалярно на каждый столбец матрицы *B* (стоящей справа).

Пример 2. Найти произведение матриц $A=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Решение. Размер матрицы *A* 3x2, матрицы *B* 2x2. Поэтому произведение *AB* найти можно, произведение *BA* – нет. Действуя по сформулированному выше правилу, получаем:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} (-1;1)(1,3) & (-1;1)(-2;4) \\ (0;4)(1;3) & (0,4)(-2;4) \\ (2;1)(1;3) & (2;1)(-2;4) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1+3 & 2+4 \\ 0+12 & 0+16 \\ 2+3 & -4+4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 12 & 16 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Матрицей, *транспонированной* к матрице *A* размера *m*x*n,* называется матрица A^T размера *n*x*m,* строки которой являются столбцами исходной матрицы.

Например, если $C=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$, то $C^T=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Пример 3. Найти $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}+2\begin{pmatrix} -2 & 4 & 6 \\ 5 & 7 & 3 \end{pmatrix}^T$.

Решение. Воспользовавшись вычислениями, проведенными при решении примера, а также правилами умножения матрицы на число и сложения матриц, получим:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} -2 & 4 & 6 \\ 5 & 7 & 3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 12 & 16 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 4 & 7 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 16 \\ 20 & 30 \\ 17 & 6 \end{pmatrix}.$$

Матрицы А, В называются *эквивалентными*, если одна получена из другой путем элементарных преобразований.

Рангом матрицы *A* в дальнейшем будем считать число строк эквивалентной ей ступенчатой матрицы, используя обозначение *r(A)*. Так, в рассмотренном выше примере 3.4 *r(A)=3, r(B)=2.* Можно доказать, что ранг матрицы *A* (размера *m*x*n*) не может быть больше $\min\{m,n\}$ (например, для матрицы *A* размера 2x3 $r(A) \le 2$). Кроме того, ранг матрицы не зависит ни от выбора ведущих элементов, ни от проводимых преобразований. Это свойство можно использовать при проверке. Так, в примере 3.4 после перестановки первой и второй строки в матрице *B* можно в качестве ведущего сначала рассмотреть элемент b_{12}, а затем вычеркнуть третью строку, пропорциональную второй ($C_3 = -C_2$):

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & 9 \\ 1 & 3 & 2 & 5 \\ 1 & 9 & 2 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_1 \leftrightarrow C_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 4 & 9 \\ 1 & 9 & 2 & 6 \end{pmatrix} \to$$

$$\xrightarrow{C_3 = C_3 - 3C_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 4 & 9 \\ -2 & 0 & -4 & -9 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 4 & 9 \end{pmatrix}$$

Вычисление определителей. Определитель матрицы *A* размера 2x2 (определитель 2-го порядка) – это число, которое можно найти по правилу:

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

(произведение элементов, стоящих на главной диагонали матрицы, минус произведение элементов, стоящих на побочной диагонали).

Определитель матрицы *A* размера 3x3 (определитель 3-го порядка) – число, вычисляемое по правилу *«раскрытие определителя по первой строке»:*

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Пример 4. Найти: $\begin{vmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 0 \end{vmatrix}$

Решение. При нахождении определителя воспользуемся сначала формулой $\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$, а затем (для вычисления определителей 2-го порядка) формулой $\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Содержание практической работы

Задание 1. Выполнить указанные действия с матрицами (13 баллов)

1.1. Сложить матрицы A и B:

а) $A=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$;

в) $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 8 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -5 & 3 & 16 \\ 0 & 0 & 0 \\ 7 & 10 & 0 \end{pmatrix}$; г) $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}$.

1.2. Умножить матрицу на число:

а) $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 5 & -3 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\kappa=3$; б) $B=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 6 & 4 & 4 \\ -5 & 1 & -1 & 3 & -7 \\ 7 & 9 & -14 & 3 & 10 \end{pmatrix}$, $\kappa=-5$.

1.4. Найти линейную комбинацию матриц:

а) $3A-2B$, если $A=\begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ -1 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & -7 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 0 & -3 & 5 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix}$.

б) $2A-B$, если $A=\begin{pmatrix} 2 & -6 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -5 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.

в) $2A+3B-C$, если $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} -7 & -4 \\ 18 & -8 \end{pmatrix}$.

1.5. Найти матрицу $C=A\cdot B$:

а) $A=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$;

в) $A=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; г) $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Задание 2. Вычислить определители (9 баллов):

1) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & -\cos\alpha \\ \cos\alpha & \sin\alpha \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 0 & i \\ 2i & -1 \end{vmatrix}$; 3) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$

4) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}$;   5) $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -10 \end{vmatrix}$;   6) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 4 & 7 \\ -3 & 1 & 5 \end{vmatrix}$

7) $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$;   8) $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 8 & 7 & -1 \end{vmatrix}$ 9) $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -5 & -4 \\ 6 & 9 & -1 \end{vmatrix}$

Критерии оценки	
Количество набранных баллов	Оценка
менее 10	2
10-14	3
15-17	4
18-22	5

Практическая работа №7

Тема: Решение систем линейных алгебраических уравнений различными способами

Цель: сформировать умение исследовать и использовать различные методы для решения систем линейных алгебраических уравнений

Практическая работа состоит из двух частей – теоретической и практической. После изучения теоретического материала можно приступать к выполнению практической части. Она состоит из одной или более задач для самостоятельного выполнения. Не забывайте о правильном оформлении решения.

Порядок выполнения работы

1. Рассмотрите теоретический материал по теме и примеры решения задач (приведены ниже).

2. Решите задачи для самостоятельного выполнения. Оформите решение письменно в тетради для практических работ.

Теоретические сведения к практической работе

Рассмотрим системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) произвольной размерности, состоящие из m уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}. \qquad (*)$$

Матрица $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$, составленная из коэффициентов системы (*), называется матрицей системы (ее размер – *m*x*n*), а вектор $B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$ (*m*-мерный)- столбцом (вектором) свободных членов. Матрицу вида $\left(A|B\right)=\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$ называют расширенной матрицей системы (*). Любой набор значений неизвестных $x_1, x_2, \dots, x_n$, образующих *n*-мерный вектор $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}=(x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, является решением системы (*), если эти числа удовлетворяют всем уравнениям системы (т.е. превращают их в тождества). Очевидно, что $b_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n$ при каждом *i=1,2,…,m* (*i-е* уравнение представляет собой скалярное произведение *i-й* строки матрицы системы на вектор *X*), и (*) можно переписать в виде

$$AX = B. \qquad (**)$$

Запись (**) называется "матричной (векторной) формой записи" системы (*).

Пример 1. Выписать матрицу коэффициентов и столбец свободных членов для СЛАУ

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - 7x_4 = 5 \\ 6x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 7 \\ 4x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 = 10 \end{cases}.$$

Решение. Очевидно, что $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -7 \\ 6 & -3 & 2 & -4 \\ 4 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 10 \end{pmatrix}$.

Пример 2. Записать СЛАУ, если $A=\begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 & 0 \\ 1 & 7 & 0 & 8 \\ 0 & -2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}$.

Решение. Введем в рассмотрение вектор *X* и с каждым столбцом мысленно сопоставим неизвестное: с первым столбцом - x_1, со вторым - x_2, с третьим - x_3, с четвертым - x_4. Окончательно нужная система линейных алгебраических уравнений имеет вид

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 2 \\ x_1 + 7x_2 + 8x_4 = -4 \\ -2x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 8 \end{cases}.$$

Классификация систем линейных алгебраических уравнений. Определения и основные теоремы. Если СЛАУ (*) имеет хотя бы одно решение, она называется *совместной* (соответственно, система *несовместная*, если она вообще не имеет решений). Совместная система (*) называется *определенной,* если она имеет единственное решение, и *неопределенной*, если имеет более одного решения (в последнем случае у нее бесконечно много решений).

Матрицу системы (*) будем называть *приведенной* (а саму систему *канонической*), если в каждой *i-й* строке *(i=1,2,...,m)* есть элемент $a_{ij}=1$, а все остальные элементы *j-го* столбца равны нулю. Такие элементы (и соответствующие им неизвестные) будем называть *ведущими,* а оставшиеся неизвестные назовем *свободными*.

Теорема 1 (Кронекера-Капелли). СЛАУ (*) совместна тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы совпадает с рангом ее расширенной матрицы, т.е выполняется равенство $r(A)=r(A|B)$.

Для совместной системы число $r=r(A)=r(A|B)$ назовем рангом системы.

Теорема 2 (о количестве решений). Пусть СЛАУ (*) совместна. Если ее ранг равен числу неизвестных ($r=n$), то система является определенной; если ранг системы меньше числа неизвестных ($r<n$), то исходная система – неопределенная.

Неопределенная система, как было отмечено, имеет бесконечное множество решений. Совокупность всех решений называется *общим решением системы.*

Алгоритм метода Гаусса. Цель рассуждений – путем элементарных преобразований свести исходную систему к равносильной, решение которой можно выписать непосредственно. Основными шагами метода Гаусса являются следующие.

I. *Прямой ход.* Выписать расширенную матрицу системы, путем элементарных преобразований свести ее к эквивалентной ступенчатой и определить ранги матрицы и расширенной матрицы системы. Если они различны, то исходная система несовместна, т.е. не имеет решений. Если $r(A)=r(A|B)$, то переходим к следующему этапу.

II. Сравнить ранг системы и число неизвестных, сделать вывод о количестве решений, учитывая теорему 2.

III. *Обратный ход.* Ступенчатую матрицу преобразовать к эквивалентной ей приведенной. Определить, какие неизвестные являются ведущими, какие – свободными.

IV. Выписать по полученной матрице систему, записать ответ (выразив, в случае неопределенной системы, ведущие элементы через свободные для построения общего решения).

Пример 3. Решить СЛАУ $\begin{cases} 2x_1-x_2-x_3=4 \\ 3x_1+4x_2-2x_3=11 \\ 3x_1-2x_2+4x_3=11 \end{cases}$.

Решение. Преобразуем расширенную матрицу системы:

$$(A|B)=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & -2 & 11 \\ 3 & -2 & 4 & 11 \end{array}\right) \xrightarrow[C_3=C_3-2C_1]{C_2=C_2+4C_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 4 \\ 11 & 0 & -6 & 27 \\ -1 & 0 & 6 & 3 \end{array}\right) \to$$

$$\xrightarrow{C_3=C_3+C_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 4 \\ 11 & 0 & -6 & 27 \\ 10 & 0 & 0 & 30 \end{array}\right) \xrightarrow{C_3=C_3/10} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 4 \\ 11 & 0 & -6 & 27 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right).$$

Последняя матрица – ступенчатая. Ведущими неизвестными для нее являются x_2 в первой строке, x_3 во второй и x_1 в третьей. Очевидно, что система совместна и ее ранг равен 3: $r(A|B) = r(A) = 3 = r$. Поскольку число неизвестных также равно 3, исходная система является определенной.

Переходим к проведению преобразований по обратному методу Гаусса (теперь необходимо получать нули НАД ведущими элементами).

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 4 \\ 11 & 0 & -6 & 27 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[C_1 = C_1 - 2C_3]{C_2 = C_2 - 11C_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -6 & -6 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right) \to$$

$$\xrightarrow[C_2 = -C_2/6]{C_1 = C_1 - C_2/6} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right).$$

Теперь составляем по последней матрице систему $\begin{cases} -x_2 = -1 \\ x_3 = 1 \\ x_1 = 3 \end{cases}$ и выписываем значения неизвестных в порядке их номеров: $X=(3;1;1)^T$. Это и есть ответ.

Пример 4. Для СЛАУ $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \\ 6x_1 + 8x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 7 \\ 10x_1 + 12x_2 + 3x_3 + 10x_4 = 16 \end{cases}$ найти общее и два частных решения.

Решение. Приведем расширенную матрицу системы к ступенчатой.

$$(A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 6 & 8 & 2 & 5 & 7 \\ 10 & 12 & 3 & 10 & 16 \end{array}\right) \xrightarrow[C_3 = C_3 - 3C_1]{C_2 = C_2 - 2C_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 4 & 7 \end{array}\right) \to$$

$$\xrightarrow{C_3 \leftrightarrow C_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Очевидно, что $r(A|B) = r(A) = 3 = r$, число неизвестных *n=4* и в соответствии с теоремой 6.2 исходная система является неопределенной. Ведущие неизвестные: x_3 в первой строке, x_1 во второй, x_4 в третьей. Свободное неизвестное - x_2. Обратным ходом преобразуем матрицу к приведенному виду:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[C_1 = C_1 - 2C_2]{C_2 = C_2 - 4C_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 4 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{C_1 = C_1 - 3C_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 4 & 1 & 0 & -8 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Выписываем полученную систему и ведущие неизвестные выражаем через свободные: $\begin{cases} 4x_2 + x_3 = -8 \\ x_1 = 3 \\ x_4 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_3 = -8 - 4x_2 \\ x_1 = 3 \\ x_4 = 1 \end{cases}$. Общее решение записываем в порядке нумерации неизвестных: $X_{об} = (3; \quad x_2; \quad -8-4x_2; \quad 1)^T$, x_2 - любое вещественное число.

Частное решение можно получить, если придать свободному неизвестному x_2 конкретное числовое значение. Например, при $x_2 = 0$ $X_ч = (3;0;-8;1)^T$, а при $x_2 = -1$ $X_ч = (3;-1;-4;1)^T$.

Теорема Крамера. Рассмотрим «квадратную» систему линейных уравнений (число неизвестных совпадает с числом уравнений) вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}. \qquad (*)$$

Если определитель матрицы системы (*) отличен от нуля ($|A| \neq 0$), то данная система имеет единственное решение, причем значения неизвестных находятся по формулам

$$x_i = \frac{|A|_i}{|A|}, \quad i=1,2,\ldots,n$$

где $|A|_i$ - определитель матрицы, полученной из исходной матрицы системы путем замены *i-го* столбца на столбец свободных членов.

Пример 5. Решить систему $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11 \end{cases}$ методом Крамера.

Решение. Выписываем A - матрицу системы и B - столбец свободных членов: $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 \\ 11 \\ 11 \end{pmatrix}$. Далее вычисляем определители:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 2(16-4) - (-1)(12+16) - 1(-6-12) = 60 \neq 0;$$

$$|A|_1 = \begin{vmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 11 & 4 & -2 \\ 11 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 4(16-4) - (-1)(44+22) - 1(-22-44) = 180;$$

$$|A|_2 = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 3 & 11 & -2 \\ 3 & 11 & 4 \end{vmatrix} = 2(44+22) - 4(12+6) - 1(33-33) = 60;$$

$$|A|_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & 11 \\ 3 & -2 & 11 \end{vmatrix} = 2(44+22) - (-1)(33-33) + 4(-6-12) = 60 \cdot$$

По теореме Крамера $x_1 = \dfrac{|A|_1}{|A|} = \dfrac{180}{60} = 3$; $x_2 = \dfrac{|A|_2}{|A|} = \dfrac{60}{60} = 1$; $x_3 = \dfrac{|A|_3}{|A|} = \dfrac{60}{60} = 1$.

Для проверки результата подставим полученные значения неизвестных в каждое уравнение системы: $2 \cdot 3 - 1 - 1 \equiv 4$, $3 \cdot 3 + 4 \cdot 1 - 2 \cdot 1 \equiv 11$, $3 \cdot 3 - 2 \cdot 1 + 4 \cdot 1 \equiv 11$. Все уравнения обратились в тождества, значит, решение найдено верно.

Содержание практической работы

Задание 1. По расширенной матрице выписать СЛАУ (4 баллов).

1) $(A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} 8 & -2 & 5 & 6 & -4 \\ 2 & 0 & 4 & 1 & 15 \end{array}\right)$

2) $(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & -4 & 1 \\ 12 & 0 & 1 & 11 \\ 5 & 4 & 10 & -3 \end{array}\right)$

3) $(A|B) = \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 3 & -1 & 10 & 7 & 12 \\ 1 & 3 & -1 & 3 & 4 & -3 \\ -7 & 4 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$

4) $(A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -3 & 4 & 5 \\ 2 & -1 & 4 & 7 & -1 \\ 0 & 8 & 6 & 8 & 6 \end{array}\right)$

Задание 2. Решить системы уравнений методом Крамера и методом Гаусса (8 баллов).

1) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -2 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 2 \\ 5x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1 \end{cases}$

4) $\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = 9 \\ -2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = -16 \\ x_1 + 6x_3 = 13 \end{cases}$

Задание 3. Решить СЛАУ (в случае неопределенной системы выписывать общее и два любых частных решения) (4 балла).

1) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = -1 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 4 \\ -x_1 + 4x_3 = 6 \end{cases}$

2) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = -1 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 4 \\ -x_1 + 4x_3 = 4 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 1 \\ -3x_1 + 4x_2 + 4x_3 = -2 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 10 \end{cases}$

4) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = -1 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 4 \\ -2x_1 - x_2 + 8x_3 = 20 \end{cases}$

Критерии оценки

Количество набранных баллов	Оценка
менее 5	2
5-6	3
7-9	4
10-12	5

Практическая работа №9

Тема: Вычисление экстремальных значений геометрических величин.

Цель: сформировать умение решать геометрические задачи на оптимизацию.

Практическая работа состоит из двух частей – теоретической и практической. После изучения теоретического материала можно приступать к выполнению практической части. Она состоит из одной или более задач для самостоятельного выполнения. Не забывайте о правильном оформлении решения.

Порядок выполнения работы

1. Рассмотрите теоретический материал по теме и примеры решения задач (приведены ниже).

2. Решите задачи для самостоятельного выполнения. Оформите решение письменно в тетради для практических работ.

Теоретические сведения к практической работе

При решении задач на оптимизацию применяют метод математического моделирования, состоящий из 3 этапов.

- 1 этап. Составление математической модели.
- 2 этап. Работа с составленной моделью.
- 3 этап. Ответ на вопрос задачи.

Покажем применение метода математического моделирования при решении конкретной задачи.

Задача 1. Молодой предприниматель Сидоров Олег в свете экономического кризиса решил выкупить нерентабельное провинциальное перерабатывающее предприятие и пригласил экономиста Иванова Ивана помочь с расчетами по оптимизации расходов. Одна из задач поставленных перед Германом была следующая: найти, при каких условиях расход жести на изготовление консервных банок цилиндрической формы заданной емкости будет наименьшим.

Решение. 1 этап. Составление математической модели.

Составление модели облегчается тем, что известна форма банки и оговорено, что она должна быть заданной емкости. Это существенно для составления модели. Существенным является также требование, чтобы расход жести на изготовление банки был минимальным. Это требование означает, что площадь полной поверхности банки, имеющей форму цилиндра, должна быть наименьшей; существенны и размеры банки. Несущественны для составления математической модели конкретное (численное) значение емкости банки и вид консервов (мясных, овощных), для которых банка предназначена.

Обозначив емкость банки через V см³, сформулируем задачу: Определить размеры цилиндра с объемом V см³ так, что бы площадь его полной поверхности была наименьшей.

Для решения задачи обозначим радиус основания цилиндра через x, а высоту его через h (все измерения в сантиметрах). Тогда объем цилиндра $V = \pi x^2 h \Rightarrow h = \frac{V}{\pi x^2}$

Полная поверхность цилиндра:

$$S = 2\pi x^2 + 2\pi x h = 2\pi x^2 + 2\pi x \cdot \frac{V}{\pi x^2} = 2\pi x^2 + \frac{2V}{x} = \frac{2\pi x^3 + 2V}{x}$$

Итак, S(x) = $\frac{2\pi x^3 + 2V}{x}$.

Так как переменная x может принимать только положительные значения, решение задачи сводится к нахождению наименьшего значения S(x) на $(0;\infty)$.

2 этап. Работа с составленной моделью.

Найдем производную S´(x):

$$S'(x) = \left(\frac{2\pi x^3 + 2V}{x}\right)' = \frac{6\pi x^2 - \left(2\pi x^3 + 2V\right)}{x^2} = \frac{4\pi x^3 - 2V}{x^2}$$

Для нахождения критических точек решим уравнение S´(x) = 0.

Корень уравнения: x = $\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$.

При x < 0 < $\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ S´(x) < 0, а при x > $\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ S´(x) > 0.

Следовательно, в точке x = $\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ S(x) имеет минимум.

X	$(0; \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}})$	$\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$	$(\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}; \infty)$
S´	–	0	+
S	↘	min	↗

Следовательно, функция в этой точке достигает наименьшего значения.

Таким образом, площадь полной поверхности цилиндра, имеющего объем V, будет наименьшей при h = 2x = 2 $\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}$, т.е. когда цилиндр равносторонний.

3 этап. Ответ на вопрос задачи.

Наименьший расход жести на изготовление консервных банок цилиндрической формы заданной емкости будет достигнут при условии, что диаметр основания и высота банки равны между собой.

Полезно обратить внимание ребят на то, что в нашей стране выпускаются ежегодно сотни миллионов банок консервов в жестяной упаковке. Экономия 1% жести на изготовление каждой банки позволит за счет сэкономленного материала дополнительно изготовить несколько миллионов новых банок. Вместе с тем промышленность нередко выпускает консервы в жестяной таре, не обеспечивая наименьший расход материала на изготовление банки. Это обусловлено рядом причин: стремлением минимизации отходов при изготовлении банок, соображениями торговой эстетики. Возможностями транспортировки и т.д.

Содержание практической работы

Задача 1. Гарданов Марсель решил сделать своей маме подарок к 8 Марта и заказал другу юности Сабирову Денису шкатулку из драгоценного металла. В мастерскую он принес кусок листа из этого металла размером 80 Х 50 см. Требуется изготовить открытую сверху коробку наибольшей вместимости, вырезая по углам квадраты и загибая оставшиеся кромки.

Задача 2. Требуется огородить прямоугольный участок земли площадью 294 м² и разделить этот земельный участок забором на 2 равные части. При каких линейных размерах участка длина всего забора окажется минимальной?

Задача 3. Из куска железа в форме прямоугольного треугольника с катетами 2 м и 4м необходимо вырезать прямоугольник наибольшей площади со сторонами, параллельными катетам треугольника.

Критерии оценки

Максимальное количество баллов «отлично» студент получает, если:

- обстоятельно с достаточным обоснованием решены правильно задачи;
- дает правильные формулировки, точные определения, понятия терминов;
- может обосновать свой ответ, привести необходимые примеры;
- правильно отвечает на дополнительные вопросы преподавателя, имеющие целью выяснить степень понимания студентом данного материала.

Оценку «хорошо» студент получает, если:

- неполно, но правильно изложено задание;
- при изложении были допущены 1-2 несущественные ошибки, которые он исправляет после замечания преподавателя;
- дает правильные формулировки, точные определения, понятия терминов;
- может обосновать свой ответ, привести необходимые примеры;
- правильно отвечает на дополнительные вопросы преподавателя, имеющие целью выяснить степень понимания студентом данного материала.

Оценку «удовлетворительно» студент получает, если:

- неполно, но правильно изложено задание;
- при изложении была допущена 1 существенная ошибка;
- знает и понимает основные положения данной темы, но допускает неточности в формулировке понятий;
- излагает выполнение задания недостаточно логично и последовательно;
- затрудняется при ответах на вопросы преподавателя.

Оценка «неудовлетворительно» студент получает, если:

- неполно изложено задание;
- при изложении были допущены существенные ошибки, т.е. если оно не удовлетворяет требованиям, установленным преподавателем к данному виду

работы.

Практическая работа №12

Тема: Нахождение характеристик дискретной случайной величины.

Цель: сформировать умение находить характеристики случайной величины (математическое ожидание, дисперсия, среднее квадратическое отклонение).

Практическая работа состоит из двух частей – теоретической и практической. После изучения теоретического материала можно приступать к выполнению практической части. Она состоит из одной или более задач для самостоятельного выполнения. Не забывайте о правильном оформлении решения.

Порядок выполнения работы

1. Рассмотрите теоретический материал по теме и примеры решения задач (приведены ниже).

2. Решите задачи для самостоятельного выполнения. Оформите решение письменно в тетради для практических работ.

Теоретические сведения к практической работе

Дискретная случайная величина и ее числовые характеристики

Случайная величина X – это числовая функция $X = f\left(\omega_i\right)$, определенная на пространстве элементарных событий. Случайные величины, имеющие счетные множества возможных значений, называются дискретными. Дискретная случайная величина определена, если известны все ее значения и соответствующие им вероятности. Соотношение между возможными значениями случайной величины и соответствующими им вероятностями называют распределением вероятностей случайной величины. Для дискретной случайной величины это соответствие может быть записано в виде таблицы: $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$

x_i	x_1	x_2	…	x_n
p_i	p_1	p_2	…	p_n

Математическим ожиданием (средним значением) дискретной случайной величины X называют сумму произведений всех ее возможных значений на соответствующие им вероятности $M(\mathrm{X}) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$

Дисперсией дискретной случайной величины X называют математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания $D(\mathrm{X}) = M(\mathrm{X} - M(\mathrm{X}))^2$. Дисперсия дискретной случайной величины вычисляется по формулам:

$$D(\mathrm{X}) = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - m\right)^2 p_i$$

$$D(\mathrm{X}) = M(\mathrm{X}^2) - (M(\mathrm{X}))^2$$

Средним квадратичным отклонением дискретной случайной величины называют корень квадратный из дисперсии $\sigma(\mathrm{X}) = \sqrt{D(\mathrm{X})}$.

Если случайная величина X имеет биномиальное распределение вероятностей, то

$M(\mathrm{X}) = \mathrm{np} \quad D(\mathrm{X}) = \mathrm{npq}$

Пример 1: Случайная величина X задана таблицей распределения вероятностей. Найти M(X), D(X), σ(X).

x_i	2	5	8	9
p_i	0,1	0,4	0,3	0,2

Решение:

$$M(X) = 2\cdot 0,1 + 5\cdot 0,4 + 8\cdot 0,3 + 9\cdot 0,2 = 0,2 + 2 + 2,4 + 1,8 = 6,4$$

$$M(X^2) = 4\cdot 0,1 + 25\cdot 0,4 + 64\cdot 0,3 + 81\cdot 0,2 = 45,8$$

$$D(X) = 45,8 - 6,4^2 = 4,84$$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{4,84} = 2,2$$

Пример 2: Найти математическое ожидание и дисперсию числа лотерейных билетов, на которые выпадут выигрыши, если приобретено 100 билетов, а вероятность выигрыша на каждый билет равна 0,05.

Решение:

$$M(X) = 100\cdot 0,05 = 5$$

$$D(X) = 100\cdot 0,05\cdot 0,95 = 4,75$$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{4,75} = 2,18$$

Содержание практической работы

Задание 1. Найти числовые характеристики дискретных случайных величин:

1. Найти математическое ожидание случайной величины X, зная закон ее распределения:

x_i	3	5	2
p_i	0,1	0,6	0,3

2. Вероятность попадания в цель при стрельбе из орудия 0,6. Найти математическое ожидание общего числа попаданий, если будет произведено 10 выстрелов.

3. Найти дисперсию случайной величины X, которая задана следующим законом распределения:

x_i	1	2	5
p_i	0,3	0,5	0,2

4.Найти дисперсию случайной величины X, которая задана следующим законом распределения:

x_i	2	3	5
p_i	0,1	0,6	0,3

5. Производится 10 независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события равна 0,6. Найти дисперсию случайной величины X – числа появления события в этих испытаниях.

Каждая задача оценивается в 1 балл. По количеству набранных баллов выставляется отметка «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно».

Приложение 3

Вопросы для самоподготовки к устному/письменному опросу

Наименование разделов и тем	**Вопросы**
Тема 1.1 Дифференциальное и интегральное исчисление. Исследование функции с помощью производной.	1. Что называется пределом функции. 2. Сформулируйте теоремы о пределах. 3. Первый и второй замечательные пределы. 4. Производная функции. Дифференциал функции. 5. В чем заключается геометрический смысл производной? 6. Механический смысл производной. 7. Перечислите правила дифференцирования. 8. Понятие сложной функции. Производная сложной функции.
	Сформулировать правила: 1. Нахождение области определения функции. 2. Проверка того, является ли функция четной, нечетной, периодической или эта функция – функция общего вида. 3. Определение точек пересечения с осями координат. 4. Нахождение критических точек (точек, в которых производная равна нулю или не существует). 5. Определение промежутков знакопостоянства функции. 6. Определение промежутков возрастания и убывания функции (промежутков, на которых производная положительна или отрицательна). 7. Определение экстремумов функции. 8. Исследование функции на выпуклость, вогнутость, определение точек перегиба (исследование проводится по второй производной функции). 9. Нахождение асимптот функции. 10. Уточнение графика функции по точкам (произвести окончательное уточнение графика, в особенности на участках, где информация о нем недостаточна).
	1. Неопределенный интеграл. 2. Основные свойства неопределенного интеграла. 3. Методы интегрирования: метод непосредственного интегрирования; метод замены переменной (метод подстановки); методы интегрирования по частям. 4. Определенный интеграл. Формула Ньютона-Лейбница. 5. Основные свойства определенного интеграла. 6. Геометрический смысл определенного интеграла. 7. Методы вычисления определенных интегралов. 8. Геометрические и физические приложения определенного интеграла. 9. Вычисление площадей с помощью интегралов. Приложения определенного интеграла (формулы).
Тема 2.1. Теория комплексных чисел. Действия над комплексными числами	1. Определение комплексного числа (различные виды записи комплексного числа). 2. Действительная и мнимая часть комплексного числа. 3. Действия над комплексными числами в алгебраической и тригонометрической формах.

Тема 3.1. Матрицы и определители	1. Дайте определение матрицы. Действия над матрицами. 2. Что называется определителем второго порядка? 3. Определитель третьего порядка. Способы вычисления. 4. Системы линейных уравнений. 5. Методы решения систем линейных уравнений.
Тема 3.2. Системы линейных алгебраических уравнений	1. Методы решения систем линейных уравнений. 2. Метод Крамера. 3. Метод Гаусса.
Тема 4. Геометрия.	1. Определения многогранников и тел вращения. 2. Вычисление площадей поверхностей и объемов многогранников и тел вращения (формулы)
Тема 5.1. Основные понятия и теоремы теории вероятностей	1.Элементы комбинаторики: перестановки, размещения и сочетания. 2.Понятие события. Виды события. 3.Классическое определение вероятности. 4.Теорема сложения вероятностей. 5.Теорема умножения вероятностей.
Тема 5.2. Элементы математической статистики	1. Основные понятия математической статистики. 2. Закон распределения дискретной случайной величины. 3. Математическое ожидание, дисперсия, среднее квадратическое отклонение случайной величины.

Приложение 4

Задания для самостоятельной работы

№	Наименование работы	Учебное пособие по математике (Богомолов Н.В. Практические занятия по математике)			
		Теория (номера стр.)	**Упражнения** 1 вариант	2 вариант	3 вариант* (повышенный)
1.	**Самостоятельная работа:** Решение примеров по образцу по теме «Дифференциальное исчисление»	92-100	стр.98 №15 (1,3, 5,6) №16(1,3), №19 (1) №28(1), стр. 172 №258(1), №260(1)	стр.98 №15 (2,4,7,5) №16(2,4), №19 (2) №28(2), стр.172 №258(2), №260(2)	стр.98 №15 (7,8,9,10) №16(8,11), №18 (1) №29(2), стр.172 №261(3), №262(2)
2.	**Самостоятельная работа:** Решение примеров по образцу по теме «Исследование и построение графиков сложных функций»	115-117	стр.117 №66 (1) №69(1)	стр.117 №66 (2) №69(2)	стр.117 №68 (2) №71(2)
3.	**Самостоятельная работа:** Подготовка к практическим работам по темам «Вычисление неопределенных интегралов различными способами»	188-205	Карточка 1	Карточка2	Карточка 3
4.	**Самостоятельная работа:** Решение примеров по образцу по теме «Приложения производной и интеграла»	194-198	стр.101 №42 (1) №46 стр.205 Зачетная работа (в.1) стр. 219 Зачетная работа (в.1)	стр.101 №42 (2) №47 стр.205 Зачетная работа (в.2) стр. 219 Зачетная работа (в.2)	стр.101 №44 №45 стр. 219 №30, №25 стр.205 №89,90, 93,99,98
5.	**Самостоятельная работа:** Подготовка к практической работе «Решение прикладных задач»	Самоподготовка с использованием конспекта и самостоятельное решение задач (список представлен ниже)			
6.	**Самостоятельная работа:** Решение примеров по образцу по теме «Действия над комплексными числами, заданными в алгебраической форме»	229-234	стр.233 №19 (1,2,3) №20, №21(1,2) №23 (1,2) №24(1,2) №26(1-4) №27(1)	стр.233 №19 (1,2,3) №20, №21(3,4) №23 (3,4) №24(3,4) №26 (5-7) №27(2)	стр.234 №23 (5,6) №24 (4,5,6) №26(9-12) №27(5,6)
7.	**Самостоятельная работа:** Подготовка к практической работе по теме «Действия над комплексными числами, заданными в алгебраической форме»	229-234	Карточка 5	Карточка 6	Стр. 242 №56 (1), №55 (1,2), №57 (1), №65 (1,3)
8.	**Самостоятельная работа:** Решение примеров по образцу по теме «Действия над комплексными числами, заданными в тригонометрической форме»	235-237	стр.236 №29 (1,2) №30 (1), №31, №32	стр.236 №29 (3,4) №30 (2), №31, №32	стр.236 №29 (5) №37 (4,5) №39 (6), №40(1,2)
9.	**Самостоятельная работа:** Подготовка к практической работе «Действия над	235-237	Карточка 7	Карточка 7	Карточка 7

	комплексными числами, заданными в тригонометрической форме»				
10.	**Самостоятельная работа:** Решение примеров по образцу по теме «Матрицы и определители»	конспект	Карточка8	Карточка 8	Карточка 8
11.	**Самостоятельная работа:** Подготовка к практической работой «Операции над матрицами. Нахождение обратной матрицы. Вычисление ранга матрицы. Вычисление определителей»	Самоподготовка с использованием конспекта и самостоятельного решения задач по учебнику			
12.	**Самостоятельная работа:** Решение примеров по образцу по теме «Методы решения систем линейных алгебраических уравнений»	конспект	стр. 39 1,2 решить методом Крамера 3,4 –методом Гаусса	стр. 39 3,4 решить методом Крамера 1,2 –методом Гаусса	стр. 39 5,6 решить методом Крамера 7,8 –методом Гаусса
13.	**Самостоятельная работа:** Подготовка к практической работе «Решение систем линейных алгебраических уравнений различными способами»	конспект	Самоподготовка с использованием конспекта и самостоятельного решения задач по учебнику		
14.	**Самостоятельная работа:** Решение примеров по образцу по теме «Вычисление геометрических величин на моделях многогранников и тел вращения»	конспект	Самоподготовка с использованием конспекта и самостоятельного решения задач по учебнику		
15.	**Самостоятельная работа:** Решение примеров по образцу по теме «Вычисление экстремальных значений геометрических величин»	конспект	Самоподготовка с использованием конспекта и самостоятельного решения задач по учебнику (список задач представлен ниже)		
16.	**Самостоятельная работа:** Решение примеров по образцу по теме «Вычисления вероятностей. Решение простейших задач комбинаторики»	257-268	стр. 259 №18 (1) стр. 262 №33	стр.259 №18 (2) стр. 262 №34	стр. 259 №21 стр. 262 №37
17.	**Самостоятельная работа:** Подготовка к практической работе «Решение задач на определение вероятности с использованием теорем сложения и умножения»	257-268	стр. 263 №38, №39, №40, №43, №44, №45	стр. 263 №38, №39, №40, №43, №44, №46	стр. 263 №41, №42, №47, №50, №51, №64
18.	**Самостоятельная работа:** Решение примеров по образцу по теме «Построение закона распределения дискретной случайной величины»	конспект	Гмурман В.Е. «Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике»		
			стр.53 №164, №166 стр.54 №170	стр.53 №165, №166 стр.55 №171	стр.53 №166, №167 стр.55 №173
19.	**Самостоятельная работа:** Подготовка к практической работе «Построение закона распределения дискретной случайной величины»	конспект	Самоподготовка с использованием конспекта и самостоятельного решения задач по учебнику		
20.	**Самостоятельная работа:** Решение примеров по образцу по теме «Характеристики случайной величины»	конспект	стр.64 №188, №189, №191, №196, №210, №211		
21.	**Самостоятельная работа:** Подготовка к практической работе «Нахождение характеристик случайной величины»	конспект	Самоподготовка с использованием конспекта и самостоятельного решения задач по учебнику		

Карточка 1.

Задание 1. Вычислить интегралы.

1) $\int\left(\frac{7}{x^2+16}-\frac{x^4+5}{x^5}+3\sqrt{x}\right)dx$

2) $\int\left(\frac{5}{\sqrt{3+x^2}}-\frac{2x^2+10}{x}+4\sqrt[6]{x^5}\right)dx$

3) $\int\left(\frac{2+\sqrt{x}}{x}-\frac{2}{\sqrt{x^2+3}}+4e^x\right)dx$

4) $\int\left(\frac{8}{\sqrt{5+x^2}}+\frac{6+x^3}{x^4}-3\sqrt[8]{x^5}\right)dx$

Задание 2. Проинтегрировать подходящей заменой переменного.

1) $\int\frac{dx}{\sin^2 3x}$

2) $\int(2x-1)\cos(x^2-x)\,dx$

3) $\int 10^{2x+1}\,dx$

4) $\int x^2(3-x^3)^{10}\,dx$

5) $\int\frac{dx}{x\ln x}$

6) $\int\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$

Задание 3. Проинтегрировать по частям.

1) $\int(7x-1)\cos x\,dx$

2) $\int(6-5x)e^x\,dx$

3) $\int x\cos x\,dx$

4) $\int(1+2x)\cos x\,dx$

Задание 4. Вычислить определенный интеграл.

1) $\int_1^2\left(x^3+10x\right)dx$ 2) $\int_{-2}^3\left(3x^2+6x-2\right)dx$

Карточка 2.

Задание 1. Вычислить интегралы.

1) $\int\left(\dfrac{5}{5x^2+5}+7^x-\dfrac{\sin 2x}{\cos x}\right)dx$

2) $\int\left(\dfrac{2}{2x^2+2}+2^x-\dfrac{x^2-4}{x+2}\right)dx$

3) $\int\left(\dfrac{12}{3+3x^2}-3\cos x+\dfrac{x^2-9}{x-3}\right)dx$

4) $\int\left(\dfrac{6}{2x^2+2}-2\sin x+3^x\right)dx$

Задание 2. Проинтегрировать подходящей заменой переменного.

1) $\int\dfrac{xdx}{\sqrt{2+x^2}}$

2) $\int x\sqrt{5+x^2}\,dx$

3) $\int\sin\dfrac{x}{2}dx$

4) $\int\cos 2x\,dx$

5) $\int\sin 2x\,dx$

6) $\int\sin(2-3x)dx$

Задание 3. Проинтегрировать по частям.

1) $\int\operatorname{arctg} x\,dx$

2) $\int(7x+5)\ln x\,dx$

3) $\int\operatorname{arcctg} x\,dx$

4) $\int\arcsin x\,dx$

Задание 4. Вычислить определенный интеграл.

1) $\int_1^3\left(x^2-16x+3\right)dx$ 2) $\int_0^8\left(21x-19\right)dx$

Карточка 3^*.

Задание 1. Вычислить интегралы.

1) $\int\left(\frac{2}{\sqrt{4-x^2}}+\frac{4x^2-1}{x^3}-2\sqrt[8]{x^3}\right)dx$ 2) $\int\left(\frac{6}{3x^2-9}+\frac{3\sin^3 x-5}{\sin^2 x}\right)dx$

3) $\int\left(\frac{3\cos^3 x-2}{\cos^2 x}-5\sqrt[5]{x^3}\right)dx$ 4) $\int\left(\frac{16}{2x^2-8}-\frac{3-x^3}{x^4}+5^x\right)dx$

Задание 2. Проинтегрировать подходящей заменой переменного.

1) $\int e^{1-3x}\,dx$ 2) $\int e^{6x+5}\,dx$

3) $\int\frac{dx}{5x+3}$ 4) $\int e^{\sin x}\cos x\,dx$

5) $\int 3^{7x-1}\,dx$ 6) $\int\frac{dx}{e^{3x}}$

Задание 3. Проинтегрировать по частям.

1) $\int(8x-1)\sin 5x\,dx$ 3) $\int(6+5x)\ln x\,dx$

2) $\int xe^x\,dx$ 4) $\int(3x+2)\ln x\,dx$

Задание 4. Вычислить определенный интеграл.

1) $\int_{-4}^{0}\left(x^3+8\right)dx$ 2) $\int_{1}^{3}\left(2x^2+7\right)dx$

Список задач по теме «Решение прикладных задач» для самостоятельного решения

1. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной линиями: x-2y+4=0, x+y-5=0, y=0.
2. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной линией $x^2+y^2=r^2$.
3. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной линиями: $7x^2-9y+9=0$, $5x^2-y+27=0$.
4. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной линиями: x-y+2=0, y=0, x=-1, x=2.
5. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной линиями: 2x-3y+6=0, y=0, x=3.
6. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной линиями: $y=2x^2+1$, $y=x^2+10$.
7. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной линиями: $y=-1.5x^2+9x-7{,}5$, $y=-x^2+6x-5$.
8. Два тела начали двигаться одновременно из одной точки в одном направлении по прямой. Первое тело движется со скоростью $v=(6t^2+2t)$ м/с, второе – со скоростью $v=(4t+5)$ м/с. На каком расстоянии друг от друга они окажутся через 5с?
9. Два тела начали двигаться одновременно из одной точки в одном направлении по прямой. Первое тело движется со скоростью $v=(3t^2-6t)$ м/с, второе – со скоростью $v=(10t+20)$ м/с. В какой момент и на каком расстоянии от начальной точки произойдет их встреча?.
10. Два тела начали двигаться одновременно из одной точки в одном направлении по прямой. Первое тело движется со скоростью $v=3t^2$ м/с, второе – со скоростью $v=(6t^2+10)$ м/с. На каком расстоянии друг от друга они окажутся через 10с?
11. Два тела начали двигаться одновременно из одной точки в одном направлении по прямой. Первое тело движется со скоростью $v=(3t^2+4t)$ м/с, второе – со скоростью $v=(6t+12)$ м/с. В какой момент и на каком расстоянии от начальной точки произойдет их встреча?.

12. При сжатии пружины на 0,05 м затрачивается работа 25 Дж. Какую работу необходимо совершить, чтобы сжать пружину на 0,1 м?
13. Для растяжения пружины на 0,04 м необходимо совершить работу 20 Дж. На какую длину можно растянуть пружину, совершив работу 80 Дж?
14. Цилиндр с подвижным поршнем, площадь поперечного сечения которого S кв.ед., заполнен газом. Считая, что при увеличении объема газа в цилиндре соблюдается закон Бойля-Мариотта pV=k=const, вычислить работу, произведенную силой давления газа при увеличении его объема от V_0 до V_1 (температура газа поддерживается постоянной).
15. Пружина растягивается на 0,02 м под действием силы 60Н. Какую работу производит эта сила, растягивая пружину на 0,12 м?
16. В цилиндрическом сосуде объема V_0=0,2 м^3 заключен атмосферный воздух при нормальном давлении P_0=1014325Н/м^2. Воздух сжимается поршнем до объема 0,05 м^3. Какая работа производится при этом, если температура воздуха поддерживается постоянной?
17. Пружина в спокойном состоянии имеет длину 0,1 м. Сила в 20Н растягивает её на 0,01м. Какую работу надо совершить, чтобы растянуть её от 0,12 до 0,14 м?
18. Цилиндрическая цистерна с радиусом основания 0,5 м и высотой 2 м заполнена водой. Вычислить работу, которую необходимо произвести, чтобы выкачать воду из цистерны.
19. Вычислить работу, которую надо произвести, чтобы выкачать из резервуара конической формы с вершиной, обращенной книзу. Резервуар наполнен доверху водой. Радиус основания конуса R=1м, высота конуса 2м.
20. Прямоугольный резервуар, основанием которого служит квадрат со стороной 3м, а высота равна 2м, заполнен водой. Вычислите работу, которую необходимо произвести, чтобы выкачать воду из резервуара.
21. Цилиндрический резервуар с радиусом основания 2 м и высотой 3м заполнен водой. Вычислите работу, которую необходимо произвести, чтобы выкачать воду из резервуара.
22. Вычислить силу давления воды на вертикальный прямоугольный шлюз с основанием 20м и высотой 5м (уровень воды совпадает с верхним обрезом шлюза).
23. Вычислить силу давления воды на вертикальную плотину, имеющую форму равнобедренной трапеции с основаниями a и b (a > b) и высотой h.
24. Треугольная пластина с основанием 0,2 м и высотой 0,4 м погружена вертикально в воду так, что вершина лежит на поверхности воды, а основание параллельно ей. Вычислите силу давления воды на пластину.
25. Найти длину дуги параболы $y=\frac{x^2}{2}$ между точками О (0;0) и А($\sqrt{3}$;3/2).
26. Найти длину дуги параболыy=4-x^2 между точками её пересечения с осью Ох.
27. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси Ох фигуры, ограниченной параболами $y = x^2$, $y^2 = 8x$.
28. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси Ох фигуры, ограниченной линиями y^2=x, y=x^2.
29. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси Ох фигуры, ограниченной линиями y^2=8x, y=x^2.
30. Найти работу, необходимую для выкачивания воды из бассейна, имеющего форму полуцилиндра, длина которого a=25 м, а радиус R=20 м.
31. Вычислите работу, необходимую для выкачивания воды из полусферического сосуда, диаметр которого 20 м.
32. Точка движется прямолинейно по закону $S(t) = 2t^3 – 2t^2 – 4$ (s – в метрах, t – в секундах). Найдите ускорение точки в конце 2-ой секунды.
33. Тело удаляется от Земли по закону $x(t) = A(t+c)^{\frac{2}{3}}$. Используя указанный закон, найдите: а) закон, по которому изменяется скорость тела; б) ускорение тела. Докажите,

что сила, действующая на тело, меняется обратно пропорционально квадрату расстояния S.

Карточка 5 «Действия над комплексными числами, заданными в алгебраической форме»	**Карточка 6** «Действия над комплексными числами, заданными в алгебраической форме»
Вычислите: а) $(-i)^3$; б) (2 +3i) +(7 – i); в) (2 +3i)(7 – i); г) (1+i)(1-i); д) (2-3i)(2+3i); е) (3+4i)(3-4i)	Вычислите: а) $(1-i)^2$; б) i^5; в) $(1+3i)^2$; г) (2-3i)(2+3i); д) $(1+3i)^3$ е) (4-3i)(4+3i)

Карточка 7. «Действия над комплексными числами, заданными в алгебраической форме»

Задание 1. Запишите предложенные комплексные числа в тригонометрической форме: 1)-3i; 2)2+i; 3)3 + 3i; 4) 2-5i; 5) 7 +8i; 6)10-5i; 7) 2-4i.

Задание 2. Вычислить: а) $(-1+i)^{13}$; b) $\sqrt[3]{-1}$.

Задание 3. Выполните умножение, используя тригонометрическую форму комплексного числа:

1) $(5+5i)(\cos 15^0 + i\sin 15^0)$

2) $(1+i\sqrt{3})(-2-2i\sqrt{3})$

Карточка 8. «Матрицы и определители»

Задание 1. Выполнить арифметические действия с матрицами:

1) $3\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & 5\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}1 & -4\\ 5 & 0\end{pmatrix}$;

2) $\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & -4\end{pmatrix}^T + 2\begin{pmatrix}5 & -1\\ 0 & 3\end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix}3 & -4 & 5\\ -8 & 10 & 4\end{pmatrix}^T - 3\begin{pmatrix}-5 & -1\\ 8 & 4\\ 1 & -1\end{pmatrix}$;

4) $\begin{pmatrix}2 & 0 & 8\\ 3 & 8 & 5\\ 0 & -4 & 7\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}2 & 10 & 3\\ 0 & 4 & -2\\ 5 & 2 & -9\end{pmatrix}^T$;

5) $\begin{pmatrix}1 & 2\\ -3 & 14\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1 & 4\\ 5 & 10\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2 & 4\\ -1 & 3\end{pmatrix}$;

6) $\begin{pmatrix}-3 & 1 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -1 & -3 & 2\\ 1 & 0 & -1 & 0\\ -1 & 3 & 1 & 10\\ 2 & 4 & 8 & -1\end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix}3\\ -2\\ -3\\ 1\end{pmatrix}^T$;

7) $\begin{pmatrix}3 & -4 & 5\\ 5 & 6 & -2\end{pmatrix}^T - \begin{pmatrix}-5 & 6\\ 2 & -3\\ 1 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}7 & 2\\ -1 & -1\end{pmatrix}$

Задание 2. Доказать равенство (AB)C=A(BC) для матриц:

1) $A=\begin{pmatrix}4 & -2\\ 1 & -3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}6 & -1\\ 3 & 2\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1 & 4\\ -2 & 5\end{pmatrix}$;

2) $A=\begin{pmatrix}-3 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 3 & 1 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ -3 & 1 & 4\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1 & 3 & 1\\ 2 & 1 & 4\\ -1 & 1 & -1\end{pmatrix}$;

3) $A=\begin{pmatrix}-3 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 3 & 1 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & -1\\ 3 & 1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}-2 & 4 & -1\\ 1 & 2 & 0\end{pmatrix}$;

Задание 4. Вычислить определители:

1) $\begin{vmatrix}\sin\alpha & -\cos\alpha\\ \cos\alpha & \sin\alpha\end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix}-1 & i\\ i & -1\end{vmatrix}$; 3) $\begin{vmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{vmatrix}$

4) $\begin{vmatrix}2 & 3\\ 5 & 6\end{vmatrix}$; 5) $\begin{vmatrix}3 & -2\\ 4 & -10\end{vmatrix}$; 6) $\begin{vmatrix}1 & 0 & 5\\ 0 & 4 & 7\\ -3 & 1 & 5\end{vmatrix}$

7) $\begin{vmatrix}3 & 0 & 1\\ 0 & -2 & 3\\ 1 & 1 & -1\end{vmatrix}$; 8) $\begin{vmatrix}3 & 3 & 2\\ 5 & 3 & -2\\ 1 & -2 & 1\end{vmatrix}$ 9) $\begin{vmatrix}4 & 2 & 1\\ 1 & -5 & 3\\ 8 & 7 & -1\end{vmatrix}$

Список задач для самостоятельного решения по теме «Вычисление экстремальных значений геометрических величин»

Задача 1. Разрежьте отрезок длиной 18 см на две части так, чтобы приняв их за катеты, получить прямоугольный треугольник с наименьшей гипотенузой.

Задача 2. Окно имеет форму прямоугольника, периметр которого равен 8 м. Каковы должны быть размеры окна, чтобы оно пропускало наибольшее количество света?

Задача 3. На странице книги печатный текст должен занимать 150 см^2. верхнее и нижнее поля страницы по 3 см, правое и левое – по 2 см. Если принимать во внимание только экономию бумаги, то каковы должны быть наиболее выгодные размеры $a\times b$ страницы?

Задача 4. Из всех прямоугольных треугольников с заданной суммой катетов найдите треугольник, у которого гипотенуза наименьшая.

Задача 5. Из круглого бревна надо выпилить балку прямоугольного сечения с наименьшими отходами. Как это сделать?

Задача 6. Прямоугольный параллелепипед с квадратным основанием и заданной площадью поверхности имеет наибольший объем. Докажите, что он является кубом.

Задача 7. Открытый сосуд с квадратным дном при данной площади поверхности должен иметь наибольший объём. Докажите, что для этого ребро основания должно быть в два раза больше высоты сосуда.

Задача 8. Из квадратного листа картона требуется сделать коробку наибольшей вместимости, вырезая по его углам равные квадратики и сгибая оставшуюся часть листа.

Задача 9. Стоимость алмаза пропорциональна квадрату его массы (при прочих равных условиях). Найденный алмаз требуется разделить на две части. При каком делении будет наибольшая потеря стоимости?

Задача 10. Найдите наибольший объём правильной треугольной пирамиды, у которой периметр боковой грани равен 6 см.

Приложение 5

Индивидуальное задание №1 «Построение графиков функций с помощью производной»

Цель работы: выявить уровень сформированности умения исследовать функцию и строить её график; способствовать формированию умения составлять презентацию для иллюстрации проделанной работы.

Индивидуальное задание состоит из двух частей – практической и творческой. Практическая часть состоит из исследования данной функции и построения её графика. Творческая часть состоит из составления презентации для иллюстрации проделанной работы.

Работа выполняется студентами в парах. Не забывайте о правильном оформлении исследования функции и построения её графика и соблюдении требований к составлению презентаций.

Порядок выполнения работы

1. Исследуйте функцию и постройте её график.
2. Составьте презентацию для иллюстрации проделанной работы, используя программу PowerPoint.

Содержание индивидуальной работы

Исследовать и построить графики следующих функций с использованием производной

1) $y=\dfrac{x}{x^2-1}$; 2) $y=\dfrac{x^2-5x}{x-1}$; 3) $y=\dfrac{x-3}{x^2+4x+4}$; 4) $y=\dfrac{2x-1}{(x-1)^2}$;

5) $y=\dfrac{x^2-9}{x^2-4}$; 6) $y=\dfrac{x+2}{x^2-9}$; 7) $y=\dfrac{x^3}{x^2-4}$; 8) $y=\dfrac{7x}{2x^2-3\tilde{o}-2}$;

9) $y=\dfrac{x+3}{x^2-9}$; 10) $y=\dfrac{x}{(x-1)^2}$; 11) $y=\dfrac{x}{4-x^2}$.

Критерии оценивания индивидуального задания

Работа оценивается **отметкой «5»,** если:

работа выполнена полностью;

в проведении исследования данной функции нет пробелов и ошибок;

в решении нет математических ошибок (возможны некоторые неточности, описки, которые не являются следствием незнания или непонимания учебного материала);

график данной функции построен верно;

при составлении презентации соблюдены все требования к её оформлению.

Отметка «4» ставится в следующих случаях:

работа выполнена полностью, но обоснования шагов исследования данной функции недостаточны (если умение обосновывать рассуждения не являлось специальным объектом проверки);

допущены небольшие недочёты в математических выкладках;

график данной функции построен верно;

при составлении презентации соблюдены все требования к её оформлению.

Отметка «3» ставится, если:

работа выполнена не полностью, с большим количеством ошибок (функция исследована не на все свойства);

презентация не соответствует необходимым требованиям.

Отметка «2» ставится, если:

допущены существенные ошибки, показавшие, что обучающийся не обладает обязательными умениями по данной теме в полной мере.

Приложение 6

Проектно-исследовательская работа

Цель работы: формирование навыков проектно-исследовательской деятельности с применением различных средств математики.

Проект 1 «Коническое отверстие»

Темы: основы тригонометрии, многогранники и круглые тела, уравнения и неравенства.

Описание практической ситуации: пусть в монолитной детали выточено коническое отверстие (внутренний конус).

Как измерить угол α – раствор конуса (рис.1)?

В руководстве по техническим измерениям рекомендуется заложить в отверстие шарик диаметром d и глубиномером измерить глубину l, на которую он опустится (рис. 2).

Задача 1. Как найти l, зная d и α?

Задача 2. Почему нельзя найти α по одному измерению (d, l)?

Задача 3. Как по результатам двух измерений (d_1 , l_1; d_2 , l_2)?

Проект 2 «Средний диаметр резьбы»

Темы: основы тригонометрии, многогранники и круглые тела.

Описание практической ситуации: профиль треугольной цилиндрической резьбы (осевое сечение) показан на рис.3.

Все треугольники равнобедренные с углом при вершине α, у метрической резьбы $\alpha = 60^0$, у дюймовой $\alpha = 55^0$; р – шаг резьбы – расстояние между соседними вершинами, то есть основание треугольника; средний диаметр D_2 – расстояние между средними линиями треугольников в противоположных рядах; внутренний диаметр D_1 – расстояние между основаниями (р и α считаются известными).

Задача 1. Как связаны D_1 и D_2?

Задача 2. Как найти D_2, зная М, р и α?

Задача 3. Выпишите формулы пересчёта М на D_2 для метрической и дюймовой резьбы.

Проект 3 «Расточка эксцентриков»

Темы: развитие понятия о числе, основы тригонометрии, многогранники и круглые тела, многогранники и круглые тела, уравнения и неравенства.

Описание практической ситуации: на токарном станке подлежащая обработке деталь зажимается в трехкулачковый патрон, кулачки которого синхронно перемещаются по радиальным направляющим под углом 120^0 друг к другу (рис. 4).

Конечно, при этом ось шпинделя станка приходится на центр детали. Чтобы обточить отверстие, сдвинутое в сторону от центра круглой детали, под один кулачок подкладывается плашка. Центр детали О смещен относительно центра патрона $O^/$ на величину l (рис. 5).

Задача 1. Пусть диаметр детали равен d; смещение центра равно l. Какой толщины h нужно подложить плашку?

Задача 2. Упростите формулу для h при $l \le \frac{d}{2}$.

Приложение 7

Билеты для проведения дифференцированного зачета

В методических указаниях представлен образец одного из вариантов билета для проведения дифференцированного зачета.

Дифференцированный зачёт проводится в форме выполнения итоговой контрольной работы по математике.

На выполнение итоговой работы по математике дается 90 минут.

Работа состоит из 9 заданий.

При выполнении всех заданий необходимо записать полностью решение.

Советуем для экономии времени пропускать задание, которое не удается выполнить сразу, и переходить к следующему. К выполнению пропущенных заданий можно вернуться, если у вас останется время.

Желаем успеха!

1. Даны числа: $z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = 1 – 2i$. Найдите:

a) $z_1 + z_2$

b) $z_1 – z_2$

c) $z_1 \cdot z_2$

d) $\frac{z_1}{z_2}$

e) $z_1^2 – 2z_2$

Задание оценивается в 5 баллов.

2. Найдите произведение матриц A·B

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Задание оценивается в 1 балл.

3. Вычислите определитель тремя способами $\begin{vmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 5 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$.

Задание оценивается в 3 балла.

4. Решите систему уравнений по формулам Крамера и методом Гаусса и выполнить проверку

$$\begin{cases} 5x + y - 3z = -2; \\ 4x + 3y + 2z = 16; \\ 2x - 3y + z = 17. \end{cases}$$

Задание оценивается в 4 балла.

5. Вычислить интеграл $\int_1^3 x^3 dx.$

Задание оценивается в 1 балл.

6. Найдите производную функции $y = x^2 + \sin x$ в точке $x_0 = \pi$.

Задание оценивается в 1 балл.

7. Вычислите значение производной функции $y = \frac{x^4}{2} - \frac{3x^2}{2} + 2x$ в точке $x_o = 2$.

Задание оценивается в 1 балл.

8. Бабушка решила дать внуку Илье на дорогу какой-нибудь случайно выбранный фрукт. У неё было 3 зелёных яблока, 3 зеленых груши и 2 желтых банана. Найдите вероятность того, что Илья получит фрукт зеленого цвета?

Задание оценивается в 1 балл.

9. Найти матрицу С = 2А – В, если А= $\begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 6 & 8 & -4 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, В = $\begin{pmatrix} 9 & -2 & 0 \\ 6 & -5 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Задание оценивается в 1 балл.

Критерии оценки	
Количество набранных баллов	Оценка
менее 9	2
9-12	3
13-16	4
17-19	5

4. Подготовка и презентация доклада

Доклад - это сообщение по заданной теме, с целью внести знания из дополнительной литературы, систематизировать материл, проиллюстрировать примерами, развивать навыки самостоятельной работы с научной литературой, познавательный интерес к научному познанию.

Деятельность преподавателя:

- выдаёт темы докладов;
- определяет место и сроки подготовки доклада;
-оказывает консультативную помощь студенту: по графику проведения консультаций;
-определяет объём доклада: 5-6 листов формата А4, включая титульный лист и содержание;
- указывает примерную основную и дополнительную литературу;
-оценивает доклад и презентацию в контексте занятия.

Деятельность студента:

- собирает и изучает литературу по теме;
- выделяет основные понятия;
- вводит в текст дополнительные данные, характеризующие объект изучения;
- оформляет доклад письменно и иллюстрирует компьютерной презентацией;
- сдаёт на контроль преподавателю и озвучивает в установленный срок.

Инструкция докладчикам и содокладчикам

Докладчики и содокладчики - основные действующие лица. Они во многом определяют содержание, стиль, активность данного занятия. Сложность в том, что докладчики и содокладчики должны *знать и уметь*:

- сообщать новую информацию
- использовать технические средства
- знать и хорошо ориентироваться в теме всей презентации
- уметь дискутировать и быстро отвечать на вопросы
- четко выполнять установленный регламент: докладчик - 10 мин.; содокладчик - 5 мин.

Необходимо помнить, что выступление состоит из трех частей: вступление, основная часть и заключение.

Вступление помогает обеспечить успех выступления по любой тематике. Вступление должно содержать:

- название презентации (доклада);
- сообщение основной идеи;
- современную оценку предмета изложения;
- краткое перечисление рассматриваемых вопросов;
- живую интересную форму изложения;
- акцентирование оригинальности подхода;

Основная часть, в которой выступающий должен глубоко раскрыть суть затронутой темы, обычно строится по принципу отчета. Задача основной части - представить достаточно данных для того, чтобы слушатели и заинтересовались темой и захотели ознакомиться с материалами. При этом логическая структура теоретического блока должны сопровождаться иллюстрациями разработанной компьютерной презентации.

Заключение - это ясное четкое обобщение и краткие выводы.

5. Подготовка информационного сообщения

Подготовка информационного сообщения – это вид внеаудиторной самостоятельной работы по подготовке небольшого по объему устного сообщения для озвучивания на семинаре, практическом занятии. Сообщаемая информация носит характер уточнения или обобщения, несет новизну, отражает современный взгляд по определенным проблемам.

Сообщение отличается от докладов и рефератов не только объемом информации, но и ее характером – сообщения дополняют изучаемый вопрос фактическими или статистическими материалами. Оформляется задание письменно, оно может включать элементы наглядности (иллюстрации, демонстрацию).

Деятельность преподавателя:

- определяет тему и цель сообщения
- определяет место и срок подготовки сообщения
-оказывает консультативную помощь при формировании структуры сообщения;
-рекомендует базовую литературу и дополнительную литературу по теме сообщения;
- оценивает сообщение в контексте занятия.

Деятельность студента:

- собирает и изучает литературу по теме;
- составляет план или графическую структуру сообщения;
- выделяет основные понятия;
- вводит в текст дополнительные данные, характеризующие объект изучения;
- оформляет текст письменно;
- сдаёт на контроль преподавателю и озвучивает в установленный срок.

Критерии оценки:

- актуальность темы;
- соответствие содержания теме;
- глубина проработки материала;
- грамотность и полнота использования источников;
- наличие элементов наглядности.

6. Подготовка рефератов

Тематика рефератов

«Роль и место математики в современном мире при освоении профессиональных дисциплин и в сфере профессиональной деятельности»

«Выдающиеся личности в математике»

«История возникновения комплексных чисел»

Порядок сдачи и защиты рефератов

1. Реферат сдается на проверку преподавателю за 1-2 недели до зачетного занятия:
2. При оценке реферата преподаватель учитывает:

- соответствие содержания теме;
-грамотность и полноту использования источников;
- связность, логичность и грамотность составления;
- оформление в соответствии с требованиями ГОСТ.

3. Защита тематического реферата проводится на соответствующих занятиях в рамках часов учебной дисциплины или за счёт часов выделенных на индивидуальные консультации.
4. Защита реферата студентом предусматривает
доклад по реферату не более 5-7 минут и ответы на вопросы.

На защите *запрещено* чтение текста реферата.

5. Общая оценка за реферат выставляется с учетом оценок за работу, доклад, умение вести дискуссию и ответы на вопросы.

Содержание и оформление разделов реферата *(см. прил.1)*

Титульный лист. Является первой страницей реферата и заполняется по строго определенным правилам.

В верхнем поле указывается полное наименование учебного заведения.

В среднем поле дается заглавие реферата, которое проводится без слова " тема " и в кавычки не заключается.

Далее, ближе к левому краю титульного листа, указываются фамилия, инициалы студента, написавшего реферат, а также его курс и группа. Справа указываются фамилия и инициалы преподавателя - руководителя работы.

В нижнем поле указывается год написания реферата.

После титульного листа помещают *оглавление*, в котором приводятся все заголовки работы и указываются страницы, с которых они начинаются. Заголовки оглавления должны точно повторять заголовки в тексте. Сокращать их или давать в другой формулировке и последовательности нельзя.

Все заголовки начинаются с прописной буквы без точки на конце.

Заголовки одинаковых ступеней рубрикации необходимо располагать друг под другом. Заголовки каждой последующей ступени смещают на три - пять знаков вправо по отношению к заголовкам предыдущей ступени.

Введение. Здесь обычно обосновывается актуальность выбранной темы, цель и содержание реферата, указывается объект / предмет / рассмотрения, приводится характеристика источников для написания работы и краткий обзор имеющейся по данной теме литературы. Актуальность предполагает оценку своевременности и социальной значимости выбранной темы, обзор литературы по теме отражает знакомство автора реферата с имеющимися источниками, умение их систематизировать, критически рассматривать, выделять существенное, определять главное.

Основная часть. Содержание глав этой части должно точно соответствовать теме работы и полностью ее раскрывать. Эти главы должны показать умение исследователя сжато, логично и аргументировано излагать материал, обобщать, анализировать, делать логические выводы.

Заключительная часть. Предполагает последовательное, логически стройное изложение обобщенных выводов по рассматриваемой теме.

Библиографический список использованной литературы составляет одну из частей работы, отражающей самостоятельную творческую работу автора, позволяет судить о степени фундаментальности данного реферата.

В работах используются следующие способы построения библиографических списков: по алфавиту фамилий, авторов или заглавий; по тематике; по видам изданий; по характеру содержания; списки смешанного построения. Литература в списке указывается в алфавитном порядке / более распространенный вариант - фамилии авторов в алфавитном порядке /, после указания фамилии и инициалов автора указывается название литературного источника, место издания / пишется сокращенно, например, Москва - М., Санкт - Петербург - СПб ит.д. /, название издательства / например, Мир /, год издания / например, 1996 /, можно указать страницы / например, с. 54-67 /. Страницы можно указывать прямо в тексте, после указания номера, под которым литературный источник находится в списке литературы / например, 7 / номер лит. источника/ , с. 67- 89 /. Номер литературного источника указывается после каждого нового отрывка текста из другого литературного источника.

В ***приложении*** помещают вспомогательные или дополнительные материалы, которые загромождают текст основной части работы / таблицы, карты, графики, неопубликованные документы, переписка и т.д. /. Каждое приложение должно начинаться с нового листа / страницы / с указанием в правом верхнем углу слова " Приложение" и иметь тематический заголовок. При наличии в работе более одного приложения они нумеруются арабскими цифрами / без знака " № " /, например, " Приложение 1". Нумерация страниц, на которых даются приложения, должна быть сквозной и продолжать общую нумерацию страниц основного текста. Связь основного текста с приложениями осуществляется через ссылки, которые употребляются со словом " смотри " / оно обычно сокращается и заключается вместе с шифром в круглые скобки - (см. прил. 1) /.

7. Подготовка конспекта

Написание конспекта (статьи, монографии, учебника, книги и пр.) – представляет собой вид внеаудиторной самостоятельной работы студента по созданию обзора информации, содержащейся в объекте конспектирования, в более краткой форме (см. прил. 2). В конспекте должны быть отражены основные принципиальные положения источника, то новое, что внес его автор, основные методологические положения работы, аргументы, этапы доказательства и выводы. Ценность конспекта значительно повышается, если студент излагает мысли своими словами, в лаконичной форме.

Особо значимые места, примеры выделяются цветным подчеркиванием, взятием в рамку, пометками на полях, чтобы акцентировать на них внимание и прочнее запомнить.

Работа выполняется письменно. Озвучиванию подлежат главные положения и выводы работы в виде краткого устного сообщения (3-4 мин) в рамках теоретического занятия. Контроль может проводиться и в виде проверки конспектов преподавателем.

Деятельность преподавателя:

-заинтересовывает учащихся выбором интересной темы;

- консультирует при затруднениях.

Деятельность студента:

- читает материал источника, выбирает главное и определяет второстепенные моменты;
- устанавливает логическую связь между элементами темы;
- записывает только то, что хорошо уяснил;
- выделяет ключевые слова и понятия;
- заменяет сложные развернутые обороты текста более лаконичными (свертывание).

Критерии оценки:

- содержательность конспекта, соответствие плану;
- отражение основных положений, результатов работы автора, выводов;
- ясность, лаконичность изложения мыслей студента;
-наличие схем, графическое выделение особо значимой информации;
- соответствие оформления требованиям;
- грамотность изложения;
- конспект сдан в срок.

8. Подготовка материала-презентации

Создание материалов-презентаций – это вид самостоятельной работы студентов по созданию наглядных информационных пособий, выполненных с помощью мультимедийной компьютерной программы PowerPoint (см. прил. 3).

Материалы-презентации готовятся студентом в виде слайдов с использованием программы Microsoft PowerPoint. В качестве материалов-презентаций могут быть представлены результаты любого вида внеаудиторной самостоятельной работы, по формату соответствующие режиму презентаций.

Затраты времени на создание презентаций зависят от степени трудности материала по теме, его объема, уровня сложности создания презентации, индивидуальных особенностей студента и определяются преподавателем.

Деятельность преподавателя:

- рекомендует литературу;

-помогает в выборе главных и дополнительных элементов темы;
- консультирует при затруднениях.

***Деятельность студента*:**
- изучает материалы темы, выделяя главное и второстепенное;
- устанавливает логическую связь между элементами темы;
- представляет характеристику элементов в краткой форме;
-выбирает опорные сигналы для акцентирования главной информации и отображает в структуре работы;
- оформляет работу и предоставляет к установленному сроку

Критерии оценки:
- соответствие содержания теме;
- правильная структурированность информации;
- наличие логической связи изложенной информации;
- эстетичность оформления, его соответствие требованиям;
- работа представлена в срок.

Оформление слайдов	
Стиль	⏩ необходимо соблюдать единый стиль оформления; ⏩ нужно избегать стилей, которые будут отвлекать от самой презентации; ⏩ вспомогательная информация (управляющие кнопки) не должны преобладать над основной информацией (текст, рисунки)
Фон	⏩ для фона выбираются более холодные тона (синий или зеленый)
Использование цвета	⏩ на одном слайде рекомендуется использовать не более трех цветов: один для фона, один для заголовков, один для текста; ⏩ для фона и текста используются контрастные цвета; ⏩ особое внимание следует обратить на цвет гиперссылок (до и после использования)
Анимационные эффекты	⏩ нужно использовать возможности компьютерной анимации для представления информации на слайде; ⏩ не стоит злоупотреблять различными анимационными эффектами; анимационные эффекты не должны отвлекать внимание от содержания информации на слайде
Представление информации	
Содержание информации	⏩ следует использовать короткие слова и предложения; ⏩ время глаголов должно быть везде одинаковым; ⏩ следует использовать минимум предлогов, наречий, прилагательных; ⏩ заголовки должны привлекать внимание аудитории
Расположение информации на странице	⏩ предпочтительно горизонтальное расположение информации; ⏩ наиболее важная информация должна располагаться в центре экрана; ⏩ если на слайде располагается картинка, надпись должна располагаться под ней.
Шрифты	⏩ для заголовков не менее 24; ⏩ для остальной информации не менее 18; ⏩ шрифты без засечек легче читать с большого расстояния;

	⏩ нельзя смешивать разные типы шрифтов в одной презентации; ⏩ для выделения информации следует использовать жирный шрифт, курсив или подчеркивание того же типа; ⏩ нельзя злоупотреблять прописными буквами (они читаются хуже, чем строчные).
Способы выделения информации	Следует использовать: ⏩ рамки, границы, заливку ⏩ разные цвета шрифтов, штриховку, стрелки ⏩ рисунки, диаграммы, схемы для иллюстрации наиболее важных фактов
Объем информации	⏩ не стоит заполнять один слайд слишком большим объемом информации: люди могут единовременно запомнить не более трех фактов, выводов, определений. ⏩ наибольшая эффективность достигается тогда, когда ключевые пункты отражаются по одному на каждом отдельном слайде.
Виды слайдов	Для обеспечения разнообразия следует использовать разные виды слайдов: с текстом, с таблицами, с диаграммами.

9. Оформление отчётов по лабораторно-практическим, индивидуальным и исследовательским работам

Программой самостоятельной работы студентов по дисциплине «Математика» предусмотрена работа по завершению и оформлению лабораторно-практических работ.

Деятельность преподавателя:

- предоставляет методическое руководство по выполнению практических работ;
- определяет информационные источники;
- устанавливает сроки сдачи отчётов по лабораторно-практическим, индивидуальным и практическим работам;
- консультирует при затруднениях;
- оценивает предоставленные отчёты.

Деятельность студентов:

- организует свою деятельность в соответствии с методическим руководством по выполнению лабораторно-практических, индивидуальных и исследовательских работ;
- изучает информационные материалы;
- проводит мини-исследование (исследование);
- подготавливает и оформляет материалы лабораторно-практических, индивидуальных и исследовательских работ в соответствии с требованиями;
- предоставляет отчёты в срок.

Критерии оценки:

- грамотность и последовательность изложения содержания проведённого мини-исследования по практической работе;
- оформление в соответствии с требованиями;
- предоставление в срок.

10. Составление кроссвордов

В процессе составления кроссвордов обучающиеся:

– просматривают и изучают необходимый материал, как в лекциях, так и в дополнительных источниках информации;
– составляют список слов раздельно по направлениям;
– составляют вопросы к отобранным словам;
– проверяют орфографию текста, соответствие нумерации;
– оформляют готовый кроссворд.

Общие требования при составлении кроссвордов:

– Не допускается наличие "плашек" (незаполненных клеток) в сетке кроссворда;
– Не допускаются случайные буквосочетания и пересечения;
– Загаданные слова должны быть именами существительными в именительном падеже единственного числа;
– Двухбуквенные слова должны иметь два пересечения;
– Трехбуквенные слова должны иметь не менее двух пересечений;
– Не допускаются аббревиатуры, сокращения;
– Не рекомендуется большое количество двухбуквенных слов;
– Все тексты должны быть написаны разборчиво, желательно отпечатаны.

Требования к оформлению:

– На каждом листе должна быть фамилия автора, а также название данного кроссворда;
– Рисунок кроссворда должен быть четким;
– Сетки всех кроссвордов должны быть выполнены в двух экземплярах:

1-й экз. - с заполненными словами;

2-й экз. - только с цифрами позиций.

Ответы публикуются отдельно. Ответы предназначены для проверки правильности решения кроссворда и дают возможность ознакомиться с правильными ответами на нерешенные позиции условий, что способствует решению одной из основных задач разгадывания кроссвордов — повышению эрудиции и увеличению словарного запаса.

Критерии оценивания составленных кроссвордов:

1. Четкость изложения материала, полнота исследования темы;
2. Оригинальность составления кроссворда;
3. Практическая значимость работы;
4. Уровень стилевого изложения материала, отсутствие стилистических ошибок;
5. Уровень оформления работы, наличие или отсутствие грамматических и пунктуационных ошибок;
6. Количество вопросов в кроссворде, правильность их изложения.

Литература

Основные источники:

1. Башмаков М.И. Математика: учебник/ М.И. Башмаков. – М.: Кнорус, 2013. – 400 с. – (начальное и среднее профессиональное образование).

2. Башмаков М.И. Математика. Книга для преподавателей: методическое пособие для НПО, СПО/ М. И. Башмаков. – М. : Издательский центр «Академия», 2013. – 224 с.

3. Башмаков М.И. Математика. Задачник: учеб. пособие для образоват. учреждений нач. и сред. проф. образования/ М. И. Башмаков. – М.: Издательский центр «Академия», 2013. – 416 с.

4. Башмаков М.И. Математика. Сборник задач профильной направленности учеб. пособие для образоват. учреждений нач. и сред. проф. образования/ М. И. Башмаков. – М. : Издательский центр «Академия», 2013. – 208 с.

5. Богомолов Н.В. Математика: учеб. для ссузов/ Н.В. Богомолов, П.И. Самойленко. – М. : Дрофа, 2009. – 395 с.

6. Богомолов Н.В. Практические занятия по математике. – М.: Юрайт, 2014. – 495 с.

Дополнительные источники:

1. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике [Текст]: полный курс/ Д.Т. Письменный – М.: Айрис-пресс, 2009. – 608с.

Приложение 1

Образец титульного листа

Министерство образования и науки Самарской области

Государственное автономное образовательное учреждение
среднего профессионального образования
«САМАРСКИЙ МЕТАЛЛУРГИЧЕСКИЙ КОЛЛЕДЖ»

Р Е Ф Е Р А Т

Выполнил (а)
Ф.И.О. студента
курс, группа
специальность
Проверил:
Преподаватель
Ф.И.О. преподавателя

Самара, 2015

Образец оглавления

ОГЛАВЛЕНИЕ

Приложение 2

Образец оформления конспекта

КОНСПЕКТ
(главы монографии, учебника, статьи и пр.)

«____»
выполнил Ф.И.О. студента, курс, группа, специальность

Фамилия автора, полное наименование работы, места и год издания

План (схема простого плана):

1.
2.
3.
4.

План (схема сложного плана):

1. ________________________;
   ________________________:
   а) ______________________;
   б) ______________________;
   в) ______________________.
1.2. ______________________:
   а) ______________________;
   б) ______________________.
2. ________________________.
2.1. ___________________ и т.д.

(далее раскрываются вопросы плана)

1.
1.1.
1.2.
2.
2.1.

Приложение 3

Образец оформления презентации

1. Первый слайд:

Тема информационного сообщения (или иного вида задания): ____ Подготовил: Ф.И.О. студента, курс, группа, специальность Руководитель: Ф.И.О. преподавателя

2. Второй слайд

План: 1. ________________________________. 2. ________________________________. 3. ________________________________.

3. Третий слайд

Литература:

4. Четвертый слайд ….

Лаконично раскрывает содержание информации, можно включать рисунки, автофигуры, графики, диаграммы и другие способы наглядного отображения информации

Приложение 4

Образец титульного листа

Министерство образования и науки Самарской области

Государственное автономное образовательное учреждение
среднего профессионального образования
«САМАРСКИЙ МЕТАЛЛУРГИЧЕСКИЙ КОЛЛЕДЖ»

ОТЧЁТ
по лабораторно-практической (индивидуальной, исследовательской) работе № ___
Тема: «____»

Выполнил (а)
____
Ф.И.О. студента
____
курс, группа
____
специальность

Руководитель:
____
Ф.И.О. преподавателя

Самара, 2015

Содержание

1. Цель работы
2. Порядок проведения работы
3. Контрольные вопросы и задания
4. Вывод (заключение, ответ)
5. Литература